2021 年乌克兰数学奥林匹克

2021-05-03 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4f3bd9727b86b130

十年级

第一天

1. Alexey 和 Bogdan 用两堆石头进行游戏. 开始时，其中一堆中有 2021 块石头，第二堆是空的. 从 Bogdan 开始，两人轮流进行操作. 每次操作时，可以从其中任意一堆中捡起偶数块石头（大于零），将其中一半转移到另一堆中，另一半从游戏中移除. 当某玩家无法操作时，其被判负. 如果双方都尽力取胜，谁会赢得这游戏?

2. 用 $P^{(n)}$ 表示所有系数为 $\{2^0, 2^1, \cdots, 2^n\}$ 一个排列的 n 次多项式的集合. 求所有的自然数组 (k, d)，使得存在 n，满足对任意多项式 $P \in P^{(n)}$，$P(k)$ 均能被 d 整除.

3. 对正实数 $a \geq b \geq c$，求证：
$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{a^2+c^2}{a+c} + \frac{c^2+b^2}{c+b} \geq (a+b+c) + \frac{(a-c)^2}{a+b+c}.$$

4. 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，内心为 I，垂心为 H. 直线 AI 和 AH 分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆于另一点 D 和 E. 若 $OI \parallel BC$，求证：$\triangle OIH$ 的外心在 DE 上.

第二天

1. 求所有由连续 $n \geq 2$ 个整数组成的集合 $\{a+1, a+2, \cdots, a+n\}$，其中 $a \in \mathbb{Z}$，使得其中一个数等于其余所有数之和.

2. 圆 ω_1 和 ω_2 交于点 P 和点 Q，且分别于一个以 O 为圆心的圆 ω 相切于点 A 和点 B. 已知 A，B，Q 三点共线，求证：点 O 在 $\angle APB$ 的外角平分线上.

3. 整数数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2n} 中，每个数字出现不超过 n 次. 求证：存在 $\{1, 2\cdots, 2n\}$ 没有公共元素的两个严格递增的子列 b_1，b_2，$\cdots$，b_n 和 c_1，c_2，$\cdots$，c_n，使得对于任意 $1 \leq i \leq n$，都有 $a_{b_i} \neq a_{c_i}$.

4. 给定一个自然数 n. 求证：总能选取 n 的 $\varphi(n)+1$ 个约数（可以相同），使得其和恰好为 n.（这里 $\varphi(n)$ 为小于 n 且和 n 互素的正整数个数.）

十一年级

第一天

1. 已知对于某些整数 a_{2021}，a_{2020}，$\cdots$，a_1，a_0，当 n 为任意整数时，表达式
$$a_{2021}n^{2021} + a_{2020}n^{2020} + \cdots + a_1 n + a_0$$

均能被 2021 整除. 是否 a_{2021}，a_{2020}，$\cdots$，a_1，a_0 中的每一个数均能被 2021 整除?

2. 求所有自然数 $n \geq 3$，使得对于任意的 n 边形，总可以选择其 3 个顶点，将其边界分成三部分，而这三部分的长度能构成一个三角形.

3. 同十年级第 4 题

4. 求所有的函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对于任意的 x 和 y，均有

$$f(xf(x+y)) + f((x+y)f(y)) = (x+y)^2.$$

第二天

1. 是否存在自然数 (m, n, k)，满足方程 $m^m + n^n = k^k$?

2. 在 $\triangle ABC$ 中，AA_1，BB_1，CC_1 为三条高. 点 K 为点 B 在 A_1C_1 上的投影. 求证：过顶点 B 作 $\triangle ABC$ 的陪位中线平分线段 B_1K.

3. 同十年级第 8 题

4. 有 101 个砝码，其质量都为 1 到 2020 的整数克，砝码质量可以相同. 已知将这些砝码任意分成两堆时，总有一堆的总质量不超过 2020. 这 101 个砝码的总质量的最大可能值是多少?