2024 年日本数学奥林匹克预赛

2024-01-09　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4f841796fddbd89a

日本数学奥林匹克（JMO）分为预赛和决赛。预赛在每年的成人日（1 月的第二个星期一）举行，全国前 200 名进入决赛，决赛日期为建国日（2 月 11 日）.

今年的预赛于昨天（2024 年 1 月 8 日）举行，共 12 小题，考试时间 3 小时.

2024 年日本数学奥林匹克预赛

程国根　译

1. 已知 $\sqrt{\dfrac{123!-122!}{122!-121!}}$ 为有理数，请将其写为最简分数.

2. 称每一位上的数码均为素数的正整数为**可爱数**. 已知恰有两个三位数 n，满足 $n+2024$ 和 $n-34$ 均为**可爱数**. 求所有这样的 n.

3. 正 $\triangle ABC$ 的边长为 10. 一个过点 A 的圆和线段 BC（不含端点）相切于点 X，并和 AB、AC 分别再次交于点 D、E. 若 $BX>CX$，且 $AD+AE=13$. 求 BX 的长度.

4. 设整数 n 满足 $0\le n\le 5^5$，将 n 块黑色石头和 5^5-n 块白色石头排成一排，并重复进行如下操作共 5 次：
将所有石头从左到右每 5 个分为一组，将每一组石头替换成该组中颜色出现频率更高的一枚石头代替.
求 n 的最小值，使得无论初始排列如何，最后剩下的石头总是黑色的.

5. 求不小于 10 的最小的整数 n，使得：

$$\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\cdots\left\lfloor\frac{n}{10}\right\rfloor=\binom{n}{10}.$$

6. 在等腰三角形 ABC 中，$AB = AC = 5$，点 D 在边 AB 上，且 $AD = 3$，点 E 在边 BC 上（不含端点）．圆 ω 过点 E，且和 AB 切于点 B．设 ω 和 AE 的另一个交点为 F，$CF = 10$．若 ω 和 $\triangle ADE$ 的外接圆相切，求 BC 的长度．

7. 求满足以下条件的正整数对 (a, p) 的数量：

(1) p 为大于 2 的素数；

(2) $1 \leq a \leq 2024$；

(3) $a < p^4$；

(4) $ap^4 + 2p^3 + 2p^2 + 1$ 为完全平方数．

8. 函数 $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}$ 满足：对任意非负实数 m, n，都有

$$f(m+n)^2 = f(m|f(n)|) + f(n^2).$$

求整数组 $(f(0), f(1), \cdots, f(2024))$ 所有可能取值的个数．

9. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$AB = 7, BC = 18$．$\angle CDA$ 的角平分线和 BC 交于点 E，点 F 在线段 DE 上，满足 $\angle AED = \angle FCD$．若 $BE = 5$，$EF = 3$，求 DF 的长度．

10. 在 100×100 方格表的每个格子中填入 J、M、O 三个字母之一．称一个 2×2 的方格是“好的”，如果它满足以下条件之一：

- 四个格子内所填字母完全相同；
- 四个格子内共填有两种不同字母，每种字母恰重复两次；
- 四个格子内共填有三种不同字母，且左下角和右下角格子中所填字母相同

求所有填字母的方法数，使得每个 2×2 方格都是“好的”，且恰有 10000 对相邻格子中填有不同字母．

11. 函数 $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ 满足 $f(34) = 2024$，且对任意正整数 a, b, c，都存在一个非退化三角形，其三边长分别为 $a+f(b), b+f(c), c+f(a)$．求 $f(100)+f(101)+\cdots+f(199)$ 的最小可能值．

12. 求满足以下条件的整数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_{2100})$ $(0 \le a_i \le 2099)$ 的个数：存在整数组 $(b_1, b_2, \cdots, b_{2100})$，使得对任意 $1 \le i \le 2100$，都有

$$a_i \equiv \sum_{\substack{\gcd(j-i,2100)=1 \\ 1 \le j \le 2100}} b_j \pmod{2100}.$$

2024 年日本数学奥林匹克预赛

程国根　译

1. 已知 $\sqrt{\dfrac{123!-122!}{122!-121!}}$为有理数，请将其写为最简分数.

2. 称每一位上的数码均为素数的正整数为**可爱数**．已知恰有两个三位数 n，满足 $n+2024$和 $n-34$均为**可爱数**．求所有这样的 n.

3. 正 $\triangle ABC$的边长为 10．一个过点 A的圆和线段 BC（不含端点）相切于点 X，并和 AB、AC分别再次交于点 D、E．若 $BX>CX$，且 $AD+AE=13$．求 BX的长度.

4. 设整数 n满足 $0\le n\le 5^{5}$，将 n块黑色石头和 $5^{5}-n$块白色石头排成一排，并重复进行如下操作共 5次：将所有石头从左到右每 5个分为一组，将每一组石头替换成该组中颜色出现频率更高的一枚石头代替．求 n的最小值，使得无论初始排列如何，最后剩下的石头总是黑色的.

5. 求不小于 10的最小的整数 n，使得：$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \left\lfloor

\frac{n}{2} \right\rfloor\cdots \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor=\binom{n}{10}.$$

6. 在等腰三角形 ABC中，$AB=AC=5$，点 D在边 AB上，且 $AD=3$，点 E在边 BC上（不含端点）. 圆 ω过点 E，且和 AB切于点 B. 设 ω和 AE的另一个交点为 F，$CF=10$. 若 ω和 $\triangle ADE$的外接圆相切，求 BC的长度.

7. 求满足以下条件的正整数对 (a,p)的数量：

1. p为大于 2的素数；
2. $1\le a\le 2024$；
3. $a<p^{4}$；
4. $ap^{4}+2p^{3}+2p^{2}+1$为完全平方数.

8. 函数 $f:\mathbb{Z}_{\ge 0}\to \mathbb{Z}$满足：对任意非负实数 m,n，都有 $$f(m+n)^2=f(m| f(n)|)+f(n^2).$$求整数组 $\left(f(0), f(1), \cdots, f(2024)\right)$所有可能取值的个数.

9. 在圆内接四边形 $ABCD$中，$AB=7$，$BC=18$. $\angle CDA$的角平分线和 BC交于点 E，点 F在线段 DE上，满足 $\angle AED=\angle FCD$. 若 $BE=5$，$EF=3$，求 DF的长度.

10. 在 100×100方格表的每个格子中填入 J、M、O 三个字母之一. 称一个 2×2的方格是 “好的”，如果它满足以下条件之一：

- 四个格子内所填字母完全相同；
- 四个格子内共填有两种不同字母，每种字母恰重复两次；
- 四个格子内共填有三种不同字母，且左下角和右下角格子中所填字母相同

求所有填字母的方法数，使得每个 2×2方格都是 “好的”，且恰有 10000对相邻格子中填有不同字母.

11. 函数 $f:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$满足 $f(34)=2024$，且对任意正整数 a,b,c，都存在一个非退化三角形，其三边长分别为 $a+f(b)$，$b+f(c)$，$c+f(a)$. 求 $f(100)+f(101)+\cdots+f(199)$的最小可能值.

12. 求满足以下条件的整数组 $(a_{1},a_{2},\cdots,a_{2100})$（$0\le a_{i}\le 2099$）的个数：存在整数组 $(b_{1},b_{2},\cdots,b_{2100})$，使得对任意 $1\le i\le 2100$，都有 $$a_{i}\equiv\sum_{\gcd(j-i,2100)=1\atop 1\le j\le 2100}b_{j}\pmod{2100}.$$

解答（PDF 中已展开）

\section*{2024年日本数学奥林匹克预赛}\flushright 程国根\quad 译\ex 已知$\sqrt{\dfrac{123!-122!}{122!-121!}}$为有理数，
↪ 请将其写为最简分数. \vfill\ex 称每一位上的数码均为素数的正整数为\textbf{可爱数}. 已知恰有两个三位数n，
↪ 满足$n+2024$和$n-34$均为\textbf{可爱数}. 求所有这样的n. \vfill\ex 正$\triangle ABC$的边长为10.
↪ 一个过点A的圆和线段BC（不含端点）相切于点X，并和AB、AC分别再次交于点D、E. 若$BX>CX$，
↪ 且$AD+AE=13$. 求BX的长度. \vfill\ex 设整数n满足$0\le n\le 5^{5}$，
↪ 将n块黑色石头和$5^{5}-n$块白色石头排成一排，并重复进行如下操作共5次：
将所有石头从左到右每 5 个分为一组，将每一组石头替换成该组中颜色出现频率更高的一枚石头代替.

求n的最小值，使得无论初始排列如何，最后剩下的石头总是黑色的．\vfill\ex 求不小于10的最小的整数n，使得：
↪ $$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\cdots \left\lfloor \frac{n}{10}
↪ \right\rfloor=\binom{n}{10}.$$\vfill\ex 在等腰三角形ABC中，$AB=AC=5$，点D在边AB上，且$AD=3$，
↪ 点E在边BC上（不含端点）．圆ω过点E，且和AB切于点B．设ω和AE的另一个交点为F，
↪ $CF=10$．若ω和$\triangle ADE$的外接圆相切，求BC的长度．\vfill\ex 求满足以下条件的正整数对(a,p)的数量：
↪ \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item p为大于2的素数；\item $1\le a\le 2024$；\item $a<p^{4}$；\item
↪ $ap^{4}+2p^{3}+2p^{2}+1$为完全平方数．\end{enumerate}\vfill\ex 函数$f:\mathbb{Z}_{\ge 0}\to \mathbb{Z}$满足：
↪ 对任意非负实数m,n，都有$$f(m+n)^2=f(m|f(n)|)+f(n^2).$$求整数组$\left(f(0), f(1), \cdots,
↪ f(2024)\right)$所有可能取值的个数．\vfill\ex 在圆内接四边形$ABCD$中，$AB=7$，$BC=18$．$\angle
↪ CDA$的角平分线和$BC$交于点$E$，点$F$在线段$DE$上，满足$\angle AED=\angle FCD$．若$BE=5$，$EF=3$，
↪ 求DF的长度．\vfill\ex 在100×100方格表的每个格子中填入J、M、O三个字母之一．称一个2×2的方格是
↪ “好的”，如果它满足以下条件之一：\begin{itemize}\item 四个格子内所填字母完全相同；\item
↪ 四个格子内共填有两种不同字母，每种字母恰重复两次；\item 四个格子内共填有三种不同字母，
↪ 且左下角和右下角格子中所填字母相同\end{itemize}求所有填字母的方法数，使得每个2×2方格都是“好的”，
↪ 且恰有10000对相邻格子中填有不同字母．\vfill\ex 函数$f:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$满足$f(34)=2024$，
↪ 且对任意正整数a,b,c，都存在一个非退化三角形，其三边长分别为$a+f(b)$，$b+f(c)$，$c+f(a)$．
↪ 求$f(100)+f(101)+\cdots+f(199)$的最小可能值．\vfill\ex 求满足以下条件的整数组$(a_{1},a_{2},\cdots,a_{2100})$（$0\le
↪ a_{i}\le 2099$）的个数：存在整数组$(b_{1},b_{2},\cdots,b_{2100})$，使得对任意$1\le i\le 2100$，
↪ 都有$$a_{i}\equiv\sum_{\gcd(j-i,2100)=1\atop 1\le j\le 2100}b_{j}\pmod{2100}.$$\vfill