32 道含绝对值的不等式

2021-12-12 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4fb5165d8f7aa84a

1. 两个实数列 $a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots,b_n$ 满足 $\sum a_i^2=\sum b_i^2=1$，证明

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2\le 2|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n-1|.$$

2. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是任意实数，证明：

$$\sum_{i,j=1}^{n}|a_i+a_j|\ge n\sum_{i=1}^{n}|a_i|.$$

1. 设 a,b,c 是三个不同的正实数，证明：

$$\frac{1}{|a^2-b^2|}+\frac{1}{|b^2-c^2|}+\frac{1}{|c^2-a^2|}+\frac{8}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{28}{(a+b+c)^2}.$$

1. **(2009 年 CMO)** 给定整数 $n\ge 3$，实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $\min\limits_{1\le i<j\le n}|a_i-a_j|=1$. 求 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^3$ 的最小值.

2. **(2013 年 CMO)** 求所有的正实数 t，满足：存在一个由实数组成的无限集合 X，使得对任意的 $x,y,z\in X$ （x,y,z 可以相同），及任意实数 a 与正实数 d，均有

$$\max|x-(a-d)|,|y-a|,|z-(a+d)|>td.$$

3. **(2019 年 CMO)** 设实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_{40} 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_{40}=0$, 且对 $1\le i\le 40$, 均有 $|a_i-a_{i+1}|\le 1$, 这里 $a_{41}=a_1$. 记 $a=a_{10}$, $b=a_{20}$, $c=a_{30}$, $d=a_{40}$.
   (1) 求 $a+b+c+d$ 的最大值;
   (2) 求 $ab+cd$ 的最大值.

4. **(1995 年 CTST)** 给实数 $P\ge 2$，求 λ 的最小值使得对于任何 $a,b\in(-1,1)$ 都有

$$|a-b|^p\le\lambda(2-|a-b|)\left|\frac{a\,|a|^{p-1}}{1-|a|}-\frac{b\,|b|^{p-1}}{1-|b|}\right|.$$

1. **(2009 年 CTST)** 已知 $x_1,\cdots,x_m$，$y_1,\cdots,y_n$ 是正实数，记 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$. 求证：

$$2XY\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-y_j|\ge X^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|y_i-y_j|+Y^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-x_j|.$$

1. **(2010 年高联)** 给定整数 $n>2$，设正实数 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 满足 $a_k\le 1,k=1,2,\cdots,n$，记

$$A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k},k=1,2,\cdots,n,$$

求证:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|<\frac{n-1}{2}.$$

1. **(2017 年高联 B 卷)** 设实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$. 令 $d=\max\{|a|,|b|,|c|\}$. 证明:

$$|(1+a)(1+b)(1+c)|\ge 1-d^2.$$

2. 对所有的实数 x,y,z，证明: $|x|+|y|+|z|-|x+y|-|y+z|-|z+x|+|x+y+z|\ge 0$.

3. 对于三个互不相同的实数 a_1,a_2,a_3，按如下方式定义三个实数: b_1,b_2,b_3:

$$b_j=(1+\frac{a_ja_i}{a_j-a_i})(1+\frac{a_ja_k}{a_j-a_k})(i,j,k=1,2,3)$$

证明:

$$1+|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\le(1+|a_1|)(1+|a_2|)(1+|a_3|)$$

并指出等号成立的条件.

4. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为实数. 证明: $\sum\limits_{i,j=1}^{n}|x_i+x_j|\ge n\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$.

5. 已知 $n(n\ge 3)$ 为正整数. 证明: 对于任意不全相同的 n 个实数对 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\right|\le\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{n}\right)^2+\left(y_i-\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{n}\right)^2.$$

求所有满足等号成立的正整数 n 并举例.

1. **(1987 年 IMO)** 令 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是实数，满足条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，求证: 对于每一个整数 $k\ge 2$，存在不全为 0 的整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，对于所有的整数 i 使得 $|a_i|\le k-1$，并且有

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\le\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

2. **(1997 年 IMO)** 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是满足下列条件的实数 $|x_1+x_2+\cdots+x_n|=1$ 且 $|x_i|\le(n+1)/2,i=1,2,\cdots,n$. 证明: 存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个排列 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，使得 $|y_1+2y_2+\cdots+ny_n|\le(n+1)/2$.

3. **(2003 年 IMO)** 设 n 为正整数，实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$.

(1) 证明:

$$(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-x_j|)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_j)^2$$

(2) 证明等号成立的充要条件是 $x_1,\cdots,x_n$ 成等差数列.

1. **(2006 年 IMO)** 求最小的实数 M, 使得对所有的实数 a,b,c, 有

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ac(c^2-a^2)| \le M(a^2+b^2+c^2)^2.$$

2. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均属于区间 $[0,1]$, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-x_j| \le \frac{n^2}{2}.$$

1. 设实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$ 之和为 1 且

$$|x_{k+1}-x_k| < \frac{1}{50}, k=1,2,\cdots,99.$$

求证: 可以从这 100 个数中选出 50 个数, 使得它们的和与 $\frac{1}{2}$ 之差的绝对值不大于 $\frac{1}{100}$.

1. 设 $0 \le p_i \le 1, i=1,2,\cdots,n$, 求证: 存在 $x \in [0,1]$ 满足

$$\sum_{i}^{n}\frac{1}{|x-p_i|} \le 8n(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}).$$

1. 设实数 x,y 满足 $|x|<1, |y|<1$. 求证:

$$|\frac{x-y}{1-xy}| < 1.$$

2. x,y,z 为实数, 证明:

$$|x|+|y|+|z| \le |x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|.$$

3. 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是实数, $n \ge 2$, 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|=1, \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$. 求证:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k}\right| \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

1. 求证: 对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 存在自然数 $k, 1 \le k \le n$, 使得对任意 $1 \ge b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0$, 都有 $|\sum\limits_{i=1}^{n}b_ia_i| \le |\sum\limits_{i=1}^{k}a_i|$.

2. 如果正数 M 与数组 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n};a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n};\cdots\cdots;a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn}$ 使得对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\{-1,1,\}$ 有 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n|\leq M$，求证：

$$|a_{11}|+|a_{22}|+\cdots+|a_{nn}|\leq M.$$

求证：对任意 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in[0,2],n\geq 2$，有 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_i-a_j|\leq n^2$. 并确定对于什么样的 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 上式中的等号成立.

给定整数 $n\geq 3$. 证明：对任意实数 $a_i\geq 1(i=1,2,\cdots,n)$, 都有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\leq n^2+\sum_{1\leq i<j\leq n}|a_i-a_j|.$$

设 n 为正整数，实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leq 1$. 证明：

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\leq\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)+n^{\frac{n-1}{2}}x_1x_2\cdots x_n,$$

并指出等号成立的充要条件.

给定正整数 n 和正实数 C. 已知实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2n}$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_{2n}=C$, $|x_{k+1}-x_k|<\frac{C}{n}$ $(k=1,2,\cdots,2n,x_{2n+1}=x_1)$. 证明：存在 n 个整数 $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_n\leq 2n$，使得

$$\left|x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_n}-\frac{C}{2}\right|<\frac{C}{2n}.$$

1. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为实数. 证明：

$$\left(\sum_{1\leq i<j\leq n}|x_i-x_j|\right)^2\geq(n-1)\sum_{1\leq i<j\leq n}|x_i-x_j|^2.$$

1. 设 $n(n\geq 3)$ 为正整数.证明：对于任意不全相同的 n 个实数对 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$, 有

$$|\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)|\leq\sum_{i=1}^{n}((x_i-\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{n})^2+(y_i-\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{n})^2)$$

约定：$x_{n+1}=x_1,y_{n+1}=y_1$；并求所有满足等号成立的正整数 n.