2024 年西班牙数学奥林匹克

2024-03-18 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4fe8cd39b3c7d8fd

2024 年西班牙数学奥林匹克

程国根 译

第一天

1. 2024 个不同的素数 $p_1, p_2, \cdots, p_{2024}$ 满足条件：

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{1012} = p_{1013} + p_{1014} + \cdots + p_{2024}.$$

设 $A = p_1 p_2 \cdots p_{1012}$，$B = p_{1013} p_{1014} \cdots p_{2024}$.
求证：$|A - B| \geq 4$.

2. 给定正整数 n，实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 1$ 满足 $x_1 x_2 \cdots x_n = n + 1$. 求证：

$$\left(\frac{1}{1^2(x_1 - 1)} + 1\right)\left(\frac{1}{2^2(x_2 - 1)} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{n^2(x_n - 1)} + 1\right) \geq n+1,$$

并说明等号何时成立.

3. 设 $\triangle ABC$ 为不等边三角形，P 为三角形内部一点，满足 $\angle PBA = \angle PCA$. 直线 PB 和 $\angle BAC$ 的内角平分线交于点 Q，直线 PC 和 $\angle BAC$ 的外角平分线交于点 R. 点 S 满足 $CS \parallel AQ$，$BS \parallel AR$. 求证：Q, R, S 三点共线.

第二天

4. 实数 a,b,c,d 满足

$$abcd=1, a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}+d+\frac{1}{d}=0.$$

求证：ab, ac, ad 中至少一个等于 -1.

5. 给定平面上的两点 $p_1=(x_1,y_1), p_2=(x_2,y_2)$，用 $\mathcal{R}(p_1,p_2)$ 表示边与坐标轴平行、且以 p_1 和 p_2 为对角顶点的矩形，即

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \min\{x_1,x_2\}\le x\le\max\{x_1,x_2\}, \min\{y_1,y_2\}\le y\le\max\{y_1,y_2\}\}.$$

若对所有的点集 $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^2$，且 $|\mathcal{S}|=2024$，都存在两点 $p_1,p_2\in\mathcal{S}$，使得 $|\mathcal{S}\cap\mathcal{R}(p_1,p_2)|\ge k$，求 k 的最大可能值.

6. 设 a,b,n 为正整数，满足 bn 整除 $an-a+1$，记 $\alpha=\frac{a}{b}$. 求证：$\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor 2\alpha\rfloor, \ldots, \lfloor(n-1)\alpha\rfloor$ 除以 n 的余数是 $1,2,\cdots,n-1$ 的一个排列.

听说公众号文章留言区开放了，测试一下，欢迎大家在留言区讨论题目。

2024 年西班牙数学奥林匹克

程国根　译

第一天

1. 2024个不同的素数 $p_{1},p_{2},\cdots,p_{2024}$满足条件：$$p_{1}+p_{2}+\cdots+p_{1012}=p_{1013}+p_{1014}+\cdots+p_{2024}.$$ 设 $A=p_{1}p_{2}\cdots p_{1012}$, $B=p_{1013}p_{1014}\cdots p_{2024}$. 求证：$| A-B|\ge 4$.

2. 给定正整数 n，实数 $x_{1},x_{2},\cdots,x_{n}>1$满足 $x_{1}x_{2}\cdots x_{n}=n+1$. 求证：$$\left(\frac{1}{1^2(x_1-1)}+1\right)\left(\frac{1}{2^2(x_2-1)}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{n^2(x_n-1)}+1\right)\geq n+1,$$

并说明等号何时成立.

3. 设 $\triangle ABC$为不等边三角形，P为三角形内部一点，满足 $\angle PBA=\angle PCA$. 直线 PB和 $\angle BAC$的内角平分线交于点 Q，直线 PC和 $\angle BAC$的外角平分线交于点 R. 点 S满足 $CS\parallel AQ$，$BS\parallel AR$. 求证：Q,R,S三点共线.

第二天

4. 实数 a,b,c,d满足 $$abcd=1,a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}+d+\frac{1}{d}=0.$$ 求证：ab,ac,ad中至少一个等于 -1.

5. 给定平面上的两点 $p_{1}=(x_{1},y_{1}),p_{2}=(x_{2},y_{2})$，用 $\mathcal{R}(p_1,p_2)$表示边与坐标轴平行、且以 p_1和 p_2为对角顶点的矩形，即

$$\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\mid\min\{x_1, x_2\}\leq x\leq \max\{x_1, x_2\},\min\{y_1, y_2\}\leq y\leq \max\{y_1, y_2\}\}.$$

若对所有的点集 $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^2$，且 $|\mathcal{S}|=2024$，都存在两点 $p_1, p_2\in\mathcal{S}$，使得 $|\mathcal{S}\cap\mathcal{R}(p_1, p_2)|\geq k$，求 k的最大可能值.

6. 设 a,b,n为正整数，满足 bn整除 $an-a+1$，记 $\alpha=\frac{a}{b}$. 求证：$\lfloor\alpha\rfloor,\lfloor2\alpha\rfloor,\dots,\lfloor(n-1)\alpha\rfloor$除以 n的余数是 $1,2,\cdots,n-1$的一个排列.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年西班牙数学奥林匹克}\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}\section*{第一天}\ex
↪ $2024$个不同的素数$p_{1},p_{2},\cdots,p_{2024}$满足条件：
↪ $$p_{1}+p_{2}+\cdots+p_{1012}=p_{1013}+p_{1014}+\cdots+p_{2024}.$$
设 $A=p_{1}p_{2}\cdots p_{1012}$，$B=p_{1013}p_{1014}\cdots p_{2024}$.
求证：$|A-B|\ge 4$. \vfill\ex 给定正整数$n$，实数$x_{1},x_{2},\cdots,x_{n}>1$满足$x_{1}x_{2}\cdots x_{n}=n+1$. 求证：
↪ \begin{small}$$\left(\frac{1}{1^2(x_1-1)}+1\right)\left(\frac{1}{2^2(x_2-1)}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{n^2(x_n-1)}+1\right)\geq
↪ n+1,$$\end{small}
并说明等号何时成立. \vfill\ex 设$\triangle ABC$为不等边三角形，$P$为三角形内部一点，满足$\angle PBA=\angle PCA$.
↪ 直线$PB$和$\angle BAC$的内角平分线交于点$Q$，直线$PC$和$\angle BAC$的外角平分线交于点$R$.
↪ 点$S$满足$CS\parallel AQ$，$BS\parallel AR$. 求证：$Q,R,S$三点共线. \vfill\section*{第二天}\ex
↪ 实数$a,b,c,d$满足$$abcd=1,a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}+d+\frac{1}{d}=0.$$
求证：$ab,ac,ad$中至少一个等于$-1$. \vfill\ex 给定平面上的两点$p_{1}=(x_{1},y_{1}),p_{2}=(x_{2},y_{2})$，
↪ 用$\mathcal{R}(p_1,p_2)$表示边与坐标轴平行、且以$p_1$和$p_2$为对角顶点的矩形，即
\begin{scriptsize}$$\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\mid\min\{x_1, x_2\}\leq x\leq \max\{x_1, x_2\},\min\{y_1, y_2\}\leq y\leq \max\{y_1,
↪ y_2\}\}.$$\end{scriptsize}
若对所有的点集$\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^2$，且$|\mathcal{S}|=2024$，都存在两点$p_1, p_2\in\mathcal{S}$，
↪ 使得$|\mathcal{S}\cap\mathcal{R}(p_1, p_2)|\geq k$，求$k$的最大可能值. \vfill\ex 设$a,b,n$为正整数，
↪ 满足$bn$整除$an-a+1$，记$\alpha=\frac{a}{b}$. 求证：
↪ $\lfloor\alpha\rfloor,\lfloor2\alpha\rfloor,\dots,\lfloor(n-1)\alpha\rfloor$除以$n$的余数是$1,2,\cdots,n-1$的一个排列. \vfill
```