40 道 2021 年沙特阿拉伯 IMO 集训队训练题

2022-01-08 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_50149612bda92395

设 $\triangle ABC$ 为一个非等腰的锐角三角形，AD，BE，CF 分别为三边的高，H 为垂心，d 为 $\triangle ABC$ 外接圆在点 A 处的切线．过点 H 作 EF 的平行线，分别交 DE 于点 Q，交 DF 于点 P．求证：直线 d 和 $\triangle DPQ$ 的 D-旁切圆相切．

设 $\triangle ABC$ 为一个非等腰的锐角三角形，H 为垂心，O 为外心，AD 为圆 O 的直径．设圆 (AHD) 交 AB 于另一点 E，交 AC 于另一点 F．记 J 和 K 分别为 $\triangle AEF$ 的垂心和九点圆圆心．求证：$HJ//BC$，且 $KO=KH$．

设 $\triangle ABC$ 为一个非等腰的锐角三角形，O 为外心，BB' 和 CC' 为高．记 BB' 交圆 O 于另一点 E，CC' 交圆 O 于另一点 F．点 A 在 BC，CE，BF 上的射影分别为 D，P，Q．求证：PQ 的垂直平分线平分线段 AO 和 BC．

设 $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 和 BC，CA，AB 分别切于点 D，E，F．在直线 DF 上取点 M，P，使得 $CM//AB$，$AP//BC$．在直线 DE 上取点 N，Q，使得 $BN//AC$，$AQ//BC$．记 X 为 PE 和 QF 的交点，K 为线段 BC 的中点．求证：若 $AX=IK$，则 $\angle BAC\leq 60^\circ$．

在矩形 $ABCD$ 中，点 P 在线段 AC 上．记 Q 为圆 (PAB) 的劣弧 PB 上的一点，且满足 $QB=QC$．记 R 为圆 (PAD) 的劣弧 PD 上的一点，且满足 $RC=RD$．直线 CB 和圆 (CQR) 交于另一点 M，直线 CD 和圆 (CQR) 交于另一点 N．求证：$BM=DN$．

过 $\odot O$ 外一点 A 作 $\odot O$ 的两条切线 AB，AC．$\odot O$ 上三点 D，E，M 满足 $MD=ME$．直线 DE 交 MB 于点 R，交 MC 于点 S．在 OB 上取一点 X，在 OC 上取一点 Y，使得 $RX\perp DE$，$SY\perp DE$．求证：$XY\perp AM$．

设 AA_0 为等腰三角形 $\triangle ABC$（$AB=AC$）的高．以 AA_0 的中点为圆心的圆 γ 和 AB，AC 相切．设 X 为直线 BC 上任意一个定点，过 X 作 γ 的两条切线，分别交 AB，AC 于点 D，E，证明：$AD=CE$．

设 $\triangle ABC$ 为一个非等腰三角形，内切圆为 $\odot I$，外接圆为 $\odot O$，点 D 在线段 BC 上，圆 (BID) 交 AB 于另一点 E，圆 (CID) 交 AC 于另一点 F，圆 (DEF) 交 AB 于另一点 M，交 AC 于另一点 N．IB 和 DE 交于点 P，IC 和 DF 交于点 Q．求证：EN，FM，PQ 三线平行，且 $\triangle IPQ$ 中顶点 I 所对应的中线平分 $\odot O$ 中的弧 BAC．

设 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，KL 为 $\odot$ 中过 AB 中点 M 的直径（L，C 在 AB 异侧）．过点 M，K 的一个圆交 LC 于 P，Q 两点（P 在 Q，C 之间）．直线 KQ 交圆 (LMQ) 于另一点 R．求证：A、R、B、P 四点共圆，且 AB 为 $\triangle APR$ 的类似中线．

AB 为 $\odot O$ 的一条弦，记 M 为劣弧 AB 的中点．$\odot O'$ 和 AB 相切，和 $\odot O$ 内切．过点 M 分别作 $O'A$，$O'B$ 的垂线，交 AB 于点 C，D．求证：$AB=2CD$．

三个圆 ω_1，ω_2，ω_3 分别和直线 l 相切于点 A，B，C（B 在 A，C 之间），且 ω_2 和 ω_1，ω_3 均外切．设 X、Y 分别为 ω_2 与 ω_1、ω_3 另一条外公切线在 ω_2 上的切点．过点 B 作 l 的垂线交 ω_2 于另一点 Z．求证：以 AC 为直径的圆和直线 ZX，ZY 相切．

设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，内心为 I，顶点 A 所对的旁心为 J．记点 D 为 $\odot I$ 在边 BC 上的切点，$\angle BAC$ 的平分线和 BC 交于点 E，和 $\odot O$ 交于点 F．圆 (DEF) 和圆 O 交于另一点 T．求证：直线 AT 过圆 J 和圆 (DEF) 的一个交点．

在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=90^\circ$，$AB=AD$．记 AD 的中点为点 E，$CD=BC+AD$，$AD>BC$．求证：$\angle ADC=2\angle ABE$．

设 BC 为圆 ω 上一条固定的弦，A 为优弧 BC 上一个动点．点 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，且满足 H 为 DE 的中点．求证：随着 A 的变化，$\triangle ADE$ 的外心 O_A 在一个定圆上运动．

凸四边形 $ABCD$ 内部一点 X 满足 $XA\cdot XC^2=XB\cdot XD^2$，$\angle AXD+\angle BXC=\angle CXD$．求证：$\angle XAD+\angle XCD=\angle XBC+\angle XDC$．

设 $\triangle ABC$ 为一个非等腰的锐角三角形，外心为 O，内心为 I，内切圆 $\odot I$ 分别和 BC，CA，AB 切于点 D，E，F．设直线 EF 和 $\odot O$ 交于 P，Q 两点，求证：圆 (PQD) 平分过线段 BC 的中点．

设 $\triangle ABC$ 为一个非等腰的锐角三角形，外心为 O．$\odot O$ 在 B，C 两点处的切线交于点 T．过 T 的直线交线段 AB 于点 D，交射线 CA 于点 E．M 为 DE 的中点，MA 交 $\odot O$ 于另一点 K．求证：圆 (MKT) 和圆 O 相切．

在 $\triangle ABC$ 中，$AB<AC$，内切圆 I 和 BC 切于点 D．AD 上一点 K 满足 $CD=CK$．设 AD 和 $\odot I$ 交于另一点 G，BG 和 CK 交于点 L．求证：K 为 CL 的中点．

在 $\triangle ABC$ 中，$AB<AC$，外接圆为 $\odot O$ 在点 A 处的切线和 BC 交于点 D．设点 A 在 OD 上的射影为 H，H 在 AB 上的射影为 E，H 在 AC 上的射影为 F．直线 EF 和 $\odot O$ 交于 R，S 两点，求证：圆 (HRS) 和 OD 相切．

设 $\triangle ABC$ 为一个非等腰的锐角三角形，AD 为一条高，M 为 AD 的中点，O 为外心．直线 AO 和 BC 交于点 K，以点 K 为圆心，KA 为半径的圆和 AB 交于另一点 E，和 AC 交于另一点 F．求证：AO 平分 EF．

四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线 AC 和 BD 交于点 I，射线 DA 和 CB 交于点 E，射线 BA 和 CD 交于点 F．四边形 $ABCD$ 的牛顿线分别交 AB，BC，CD，DA 于点 M，N，P，Q．求证：以 OI 为直径的圆和圆 (ENQ)，圆 (FMP) 均相切．

AD，BE，CF 为非等腰三角形 $\triangle ABC$ 的三条高，垂心为 H．设 DF 和 HB 交于点 M，DE 和 HC 交于点 N，点 T 为 $\triangle HBC$ 的外心．求证：$AT\perp MN$．

$\triangle ABC$ 的陪位重心为点 L，外接圆半径为 R．作平行四边形 $ADLE$，$BHLK$，$CILK$，使得 $D,H\in AB$，$K,I\in BC$，$J,E\in CA$．设 DE，HK，IJ 两两相交于点 X，Y，Z．求证：$\triangle XYZ$ 的内切圆半径为 $\frac{R}{2}$．

在 $\triangle ABC$ 中，M 为 BC 的中点，X 为 B 所对的旁心，Y 为 C 所对的旁心．求证：MX，MY 和 AB，AC 的四个交点共圆．

魔术师和他的助手表演一个魔术．观众在黑板上写下一个 N 位数，然后助手盖住一些相邻的数位，使它们无法被看见．最后，魔术师进入节目，他看向黑板并猜测被盖住的数字及其顺序．已知魔术师和助手可以提前商量策略，求最小的 N，使得魔术师总能猜对．

给定一个无穷数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$，满足对任意正整数 k，存在正整数 t 使得 $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \cdots$. 问：这个数列是否一定为周期数列?

N 个人中的每个人都从一个 23 元集合中选择了 5 个元素，使得任意两个人至多选择了 3 个相同的元素. 问：是否一定有 $N \leq 2020$? 将 23 改为 25，再回答本题.

求所有正整数 $n \geq 3$，使得能在正 n 边形的每个顶点不重复地写上数字 1 到 n，满足对任意三个顶点 A，B，C，如果 $AB = AC$，那么顶点 A 上写的数字同时大于或同时小于顶点 B 和 C 上写的数字.

求证：无法在 8×8 的方格中填入 1 到 64（每个数字只用一次），使得对每个 2×2 的方格，其对角线上两个数字乘积之差均等于 1.

对正整数 k，记 $f(k)$ 为满足 km 除以 2019^3 的余数大于 m 的正整数 m 的个数. 问：$f(1)$，$f(2)$，$\cdots$，$f(2019^3)$ 中有多少个不同的数?

给定正整数 n，正整数 $m > n$，已知集合 $M = \{n, n+1, \cdots, m\}$ 能被划分为若干个子集，使得在每个子集中，存在一个数等于该子集中其余所有数之和，求 m 的最小值.

设 N 为正整数，正整数数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_N 中每一项均不为 2^{N+1} 的倍数. 对 $n \geq N+1$，定义 a_n 如下：设在 a_1，a_2，$\cdots$，a_{n-1} 中，除以 2^n 余数最小的那一项为 a_k，令 $a_n = 2a_k$（如果有多个满足条件的 a_k，则取下标最大的那一项）. 求证：存在 M，使得对于任意 $n \geq M$，都有 $a_n = a_M$.

称正整数 x“远离平方数和立方数” 的，如果对于任意整数 k，都有 $|x - k^2| > 10^6$，$|x - k^3| > 10^6$. 求证：存在无穷多个正整数 n，使得 2^n“远离平方数和立方数”.

设多项式 $P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_0$ 的所有系数均为正整数，且次数 $d \geq 2$. 数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_1 = a_0$，$b_{n+1} = P(b_n)$. 求证：对于任意正整数 $n \geq 2$，存在素数 p 满足 $p \mid b_n$，$p \nmid b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$.

$P(x)$ 为一个非常数整系数多项式，n 为正整数. 数列 a_0，a_1，$\cdots$ 定义如下：$a_0 = n$，对 $k \geq 1$，$a_k = P(a_{k-1})$. 已知对于任意正整数 b，数列中均存在某个大于 1 的整数的 b 次方. 求证：$\deg P = 1$.

礼堂的第一排有 330 个座位，其中有 25 个座位已被观众占据. 证明：在这些观众两两之间的距离中，必有两个相等.

正整数 $n \geq 2$，给定 n 个互异的正整数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，其中每个都不是完全立方数. 问：这些数两两的乘积中，最多有多少个完全立方数?

求证：可以将任意非完全平方数的所有正因子组成的集合划分为若干子集，使得每个子集中的任意两个数都存在整除关系.

是否存在互异的正整数 a_1，a_2，$\cdots$，a_{101}，b_1，b_2，$\cdots$，b_{101}，满足对于 $\{1, 2, \cdots, 101\}$ 的任意非空子集 S，$\sum\limits_{i \in S} a_i$ 整除 $101! + \sum\limits_{i \in S} b_i$.

给定正整数 m，n，使得 $m > n^{n-1}$，且 $m+1$，$m+2$，$\cdots$，$m+n$ 均为合数. 求证：存在互异的素数 p_1，p_2，$\cdots$，p_n，使得对任意正整数 $k = 1, 2, \cdots, n$，都有 $p_k \mid m + k$.