2024 年北大物理卓越计划第三题解答

2024-01-05　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5045c7f2b34f2565

题目：

已知函数 $f(x)=x^3+ax$ 有且只有一个内接正方形，求 a 与正方形的边长.

这题与 2021 年公众号上发布的数学竞赛每日一练第 21 期的题目基本一致.

数学竞赛每日一练 第21期解答

程国根　恩次方根　2021-06-25 00:00

若有且只有一个正方形，其中心位于原点，且其四个顶点在曲线$y=x^3+ax$上，求实数a的值.

解答 若$a\geq 0$，此曲线在$x>0$时只位于第一象限. 设y轴右侧正方形顶点为A，B，那么$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$的夹角必为锐角，不合题意.

若$a<0$，假设A在第一象限，B在第四象限. 则$OA\perp OB$，且$OA=OB$. 由对称性，只需考虑$x>0$时的情形.

设OA：$y=kx(k>0)$，则OB：$y=-\frac{1}{k}x$.

联立

$$\begin{cases}y=kx\\ y=x^3+ax\end{cases}$$

得$A\left(\sqrt{k-a},k\sqrt{k-a}\right)$，同理$B\left(\sqrt{-\frac{1}{k}-a},-\frac{1}{k}\sqrt{-\frac{1}{k}-1}\right)$.

由$OA=OB$得：

$$(k-a)(1+k^2)=\left(-\frac{1}{k}-a\right)\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

即

$$k^4-ak^3+ak+1=0$$

于是原题等价于：求负数a，使方程

$$k^4-ak^3+ak+1=0$$

恰有一个正数解.

$$\begin{aligned}&k^4-ak^3+ak+1=0\\ \Longleftrightarrow\ &k^2+\frac{1}{k^2}=a\left(k-\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

显然$k\neq 1$，令$t=k-\frac{1}{k}\neq 0$，则$t^2+2=at$.

即求负数a，使$t^2-at+2=0$恰有一个非零实数解.

于是$\Delta=a^2-8=0$且$a<0$.

$\therefore a=-2\sqrt{2}$.

但需要证明的是：若有且只有一个内接正方形，则该正方形的中心必然为函数的对称中心（即原点）.

设四个顶点分别为 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，$C(x_3,f(x_3))$，$D(x_4,f(x_4))$，可得方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3=x_2+x_4\\ x_1^3+ax_1+x_3^3+ax_3=x_2^3+ax_2+x_4^3+ax_4\end{cases}$$

若 $x_1+x_3\neq 0$，则可得

$$\begin{cases} x_1+x_3=x_2+x_4 \\ x_1x_3=x_2x_4 \end{cases}$$

于是 $\{x_1,x_3\}=\{x_2,x_4\}$，矛盾．于是 $x_1+x_3=x_2+x_4=0$，证毕.

接下来就是之前发的题目了.

最后再求正方形的边长：

再代入方程解得 $k=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$（取正值），于是

$$|OA|^2=(k-a)(1+k^2)=3\sqrt{2}$$

正方形边长为 $\sqrt{6\sqrt{2}}$.