2023 年韩国数学奥林匹克决赛

2023-03-27 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5065595b2bc6bdc0

第一天

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB < AC$，点 D 和点 E 分别在线段 AB 和 AC 上（异于端点）. 点 P 满足 $PB = PD$，$PC = PE$. 点 X 在 $\triangle ABC$ 外接圆的不含点 B 的弧 AC 上（异于 A、C）. 设直线 XA 和 $\triangle ADE$ 的外接圆另一个交点为 Y. 求证：$PX = PY$.

2. 函数 $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 满足对任意正实数 x，存在正实数 y，使得

$$(x + f(y))(y + f(x)) \le 4$$

且符合要求的 y 的个数是有限的. 求证：对任意正实数 $x < y$，都有 $f(x) > f(y)$.

3. p 为奇素数，设 $A(n)$ 为集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的全体元素之和为 p 的倍数的子集个数. 求证：若 2^{p-1}-1 不为 p^2 的倍数，则对任意整数 k，存在无穷多个正整数 m，使得

$$\frac{A(m) - k}{p} \in \mathbb{Z}.$$

第二天

1. 求所有正整数 n，使得 $2^n - 1$ 没有大于 7 的素因子.

2. 给定正整数 n，和 n 个盒子 B_1，$\cdots$，B_n. 按照下述规则在盒子中放入小球：选择两个正整数 $1 \le j \le i \le n$，在满足 $j \le k \le i$ 的每个盒子 B_k 中各放入一个小球.
设开始时每个盒子中的小球数依次为 x_1，$\cdots$，x_n，x_i 均为正整数. 设将每个盒子中的小球数量均变为 3 的倍数所需要的最小操作次数为 $f(x_1, \cdots, x_n)$. 对所有不同的初始状态，求 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的最大值.
（若 x_1，$\cdots$，x_n 均为 3 的倍数，则 $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$.）

3. 对正整数 $n \ge 3$ 和实数 a_1，$\cdots$，a_n，b_1，$\cdots$，b_n，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(b_i - b_{i+3}) \le \frac{3n}{8} \sum_{i=1}^{n} ((a_i - a_{i+1})^2 + (b_i - b_{i+1})^2)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$，对 $i = 1, 2, 3$，$b_{n+i} = b_i$.