Mathematical Reflections 2024 年第二期征解题

2024-03-17 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_511b8ccd40cf6fc7

1

Mathematical Reflections 2024 年第二期征解题

Junior Problems

程国根 译

J655. 求所有素数对 (p,q)，使得存在正整数 n，满足

$$(p^2q+1)^2=(n+1)!+n!+1.$$

J656. 求证：对任意正实数 a,b,c，都有

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{81(a+b)(b+c)(c+a)}{16(a+b+c)^3}\geq 3.$$

J657. 正方形 $ABCD$ 的边长为 a，中心为 O，平面上一点 M 满足 $\max\{MA,MC\}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}(MB+MD)$. 计算 OM 的长度.

J658. 求方程组的实数解：

$$\begin{cases}\lg x\cdot\lg y=\lg(xy)\\ \lg y\cdot\lg z=\lg(1000yz)\\ \lg z\cdot\lg x=\lg(zx)\end{cases}.$$

J659. 求所有非负整数对 (m,n)，使得 2^n+3^m+4 为完全平方数.

J660. 求不定方程的整数解：

$$x^2-xy+y^2=\left(\frac{x+y}{2}+6\right)^2.$$

Mathematical Reflections 2024 年第二期征解题

Senior Problems

程国根　译

S655. 计算：

$$\sin\frac{\pi}{42}\sin\frac{5\pi}{42}\sin\frac{13\pi}{42}\sin\frac{17\pi}{42}\sin\frac{19\pi}{42}\sin\frac{31\pi}{42}.$$

S656. 设 $\triangle ABC$ 的半周长为 s，面积为 K．求证：以 BC 为直径的圆与 $\triangle ABC$ 的内切圆相切当且仅当

$$\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}=\frac{s}{K}.$$

S657. 求不定方程的素数解：

$$p^6+q^6+r^6+2=s^3-t^3.$$

S658. $\triangle ABC$ 的三边长满足 $a+b+c=2$．求证：

$$\sqrt{\frac{a}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c}{c^2+ab}}\geq 2.$$

S659. 非负实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$．分别求常数 λ 的最大值，使得不等式成立：

(1) $a^2+b^2+c^2+\lambda abc\leq 1$.

(2) $a^3+b^3+c^3+\lambda abc\leq 1$.

S660. 正实数 a,b,c 满足条件

$$1-2(a+b+c)+3(ab+bc+ca)-4abc=0,$$

求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+56(a+b+c)\geq 54.$$

Mathematical Reflections 2024 年第二期征解题

Undergraduate Problems

程国根　译

U655. 设正整数 n 模 3 不余 1，z 是一个 $2^{n+1}-1$ 次单位根．计算：

$$\left(\mathrm{Re}(z)-\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{Re}(z^2)-\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{Re}(z^4)-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\mathrm{Re}(z^{2^n})-\frac{1}{2}\right).$$

U656. 域 $K\subset L$ 使得 $z^2-z+1=0$ 在 K 中无解．已知 $x,y\in L\setminus K$ 满足 $x^2+2y,y^2+2x,xy\in K$．求证：$K(x)=K(y)$．

U657. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\ln^2(n+k)\cdot\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n}3^{-(i+j)}}{\sum\limits_{1\le i<j\le n}(ij)^{-1}}.$$

U658. 求所有四元正整数组 (a,b,c,d)，使得

$$3a!+b=19^c,3a+4b!=19^d.$$

U659. 计算：

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\left((2\pi n)^p+2^p\pi^p n^{p-1}p\right)^{1/p}\right)-n\pi(1-p).$$

U660. 设整数 $n\ge 2$，实数 $a\in(-2,2)$．

(1) 求证：矩阵方程 $X^2+aX+I_n=O_n$ 在环 $M_n(\mathbb{C})$ 上有解．

(2) 求证：(1) 中的方程在 $M_n(\mathbb{R})$ 上有解当且仅当 n 为偶数．

(3) 求证：在 (1)、(2) 的情况中，方程均有无数个解．

Mathematical Reflections 2024 年第二期征解题

Olympiad Problems

程国根　译

O655. 设 a, b, d_n，$n = 1, 2, \cdots$ 为整数，其中 $a \neq 0$，且和每一个 d_n $(n \geq 1)$ 互质，对任意 $n \geq 2$，d_n 和 d_{n+1} 也互质．求证：存在 $an+b$ 的一个排列 $c_1, c_2, \cdots$，使得对任意正整数 n，都有 d_n 整除 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$．

O656. 设整数 $n \geq 2$．求最大的整数 k，使得对满足 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots a_n \geq 0$ 的任意实数 a_i，都有

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}\right)^2 \geq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}.$$

O657. 将所有素数按顺序排列为 $p_1 = 2, p_2 = 3, \cdots$．求证：存在由不同素数组成的数列 $q_1, q_2, \cdots$，使得对任意 $n \geq 1$，都有 $p_n \mid q_1 + \cdots + q_n$．

O658. 求证：存在无穷多个正整数 a，使得

$$a! + (a+2)! \mid (2a+2)!.$$

O659. 设 M 为 $\triangle ABC$ 内部任意一点．x, y, z 分别为点 M 到三边 BC, CA, AB 的距离，S 为 $\triangle ABC$ 的面积．求证：

$$\min\{MA, MB, MC\} \leq \frac{\sqrt{abc(ayz + bzx + cxy)}}{2S} \leq \max\{MA, MB, MC\}.$$

O660. 正实数 a, b, c 满足条件

$$1 - 2(a+b+c) + 3(ab+bc+ca) - 4abc = 0.$$

求证：

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 32 \geq \frac{33}{a+b+c}.$$

并说明等号成立条件．

点击阅读原文可以查看、下载原版英文题目。

Mathematical Reflections 2024 年第二期征解题

Junior Problems

程国根　译

J655. 求所有素数对 (p,q)，使得存在正整数 n，满足 $$(p^{2}q+1)^{2}=(n+1)!+n!+1.$$

J656. 求证：对任意正实数 a,b,c，都有 $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{81(a+b)(b+c)(c+a)}{16(a+b+c)^{3}}\ge 3.$$

J657. 正方形 $ABCD$的边长为 a，中心为 O，平面上一点 M满足 $\max\{MA,MC\}=\frac{1}{\sqrt{2}}(MB+MD)$．计算 OM的长度.

J658. 求方程组的实数解：$$\begin{cases}\lg x\cdot\lg y=\lg(xy)\\\lg y\cdot\lg z=\lg(1000yz)\\\lg z\cdot\lg x=\lg(zx)\end{cases}.$$

J659. 求所有非负整数对 (m,n)，使得 $2^{n}+3^{m}+4$为完全平方数.

J660. 求不定方程的整数解：$$x^{2}-xy+y^{2}=\left(\frac{x+y}{2}+6\right)^{2}.$$

Mathematical Reflections 2024 年第二期征解题

Senior Problems

程国根　译

S655.　计 算：$$\sin\frac{\pi}{42}\sin\frac{5\pi}{42}\sin\frac{13\pi}{42}\sin\frac{17\pi}{42}\sin\frac{19\pi}{42}\sin\frac{31\pi}{42}.$$

S656. 设 $\triangle ABC$的半周长为 s, 面积为 K. 求证：以 BC为直径的圆与 $\triangle ABC$的内切圆相切当且仅当 $$\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}=\frac{s}{K}.$$

S657. 求不定方程的素数解：$$p^{6}+q^{6}+r^{6}+2=s^{3}-t^{3}.$$

S658.$\triangle ABC$的三边长满足 $a+b+c=2$. 求证：$$\sqrt{\frac{a}{a^{2}+bc}}+\sqrt{\frac{b}{b^{2}+ca}}+\sqrt{\frac{c}{c^{2}+ab}}\ge 2.$$

S659. 非负实数 a,b,c满足 $a+b+c=1$. 分别求常数 λ的最大值，使得不等式成立：

1. $a^{2}+b^{2}+c^{2}+\lambda abc\le 1$.
2. $a^{3}+b^{3}+c^{3}+\lambda abc\le 1$.

S660. 正实数 a,b,c满足条件 $$1-2(a+b+c)+3(ab+bc+ca)-4abc=0,$$ 求证：$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+56(a+b+c)\ge 54.$$

Mathematical Reflections 2024 年第二期征解题

Undergraduate Problems

程国根　译

U655. 设正整数 n模 3不余 1, z是一个 $2^{n+1}-1$次单位根. 计算：$$\left(\mathrm{Re}(z)-\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{Re}(z^{2})-\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{Re}(z^{4})-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\mathrm{Re}(z^{2^{n}})-\frac{1}{2}\right).$$

U656. 域 $K\subset L$使得 $z^{2}-z+1=0$在 K中无解. 已知 $x,y\in L\setminus K$满足 $x^{2}+2y,y^{2}+2x,xy\in K$. 求证：$K(x)=K(y)$.

U657. 计算 $$\lim_{n\to\infty}\ln^{2}(n+k)\cdot\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n}3^{-(i+j)}}{\sum\limits_{1\le i<j\le n}(ij)^{-1}}.$$

U658. 求所有四元正整数组 (a,b,c,d)，使得 $$3a!+b=19^{c},3a+4b!=19^{d}.$$

U659. 计算：$$\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\left((2\pi n)^{p}+2^{p}\pi^{p}n^{p-1}p\right)^{1/p}\right)-n\pi(1-p).$$

U660. 设整数 $n\ge 2$，实数 $a\in(-2,2)$.

1. 求证：矩阵方程 $X^{2}+aX+I_{n}=O_{n}$在环 $M_{n}(\mathbb{C})$上有解.

2. 求证：（1）中的方程在 $M_{n}(\mathbb{R})$上有解当且仅当 n为偶数.
3. 求证：在（1）、（2）的情况中，方程均有无数个解.

Mathematical Reflections 2024 年第二期征解题

Olympiad Problems

程国根　译

O655. 设 a,b,d_{n}，$n=1,2,\cdots$为整数，其中 $a\neq 0$，且和每一个 d_{n}（$n\ge 1$）互质，对任意 $n\ge 2$，d_{n}和 d_{n+1}也互质．求证：存在 $an+b$的一个排列 $c_{1},c_{2},\cdots$，使得对任意正整数 n，都有 d_{n}整除 $c_{1}+c_{2}+\cdots+c_{n}$.

O656. 设整数 $n\ge 2$. 求最大的整数 k, 使得对满足 $a_{1}\ge a_{2}\ge\cdots a_{n}\ge 0$ 的任意实数 a_{i}, 都有 $$\left(\frac{a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{k}}{k}\right)^{2}\ge\frac{a_{1}^{2}+a_{2}^{2}+\cdots+a_{n}^{2}}{n}.$$

O657. 将所有素数按顺序排列为 $p_{1}=2,p_{2}=3,\cdots$．求证：存在由不同素数组成的数列 $q_{1},q_{2},\cdots$，使得对任意 $n\ge 1$，都有 $p_{n}\mid q_{1}+\cdots+q_{n}$.

O658. 求证：存在无穷多个正整数 a，使得 $$a!+(a+2)!\mid (2a+2)!.$$

O659. 设 M为 $\triangle ABC$内部任意一点．x,y,z分别为点 M到三边 BC,CA,AB的距离，S为 $\triangle ABC$的面积．求证：$$\min\{MA,MB,MC\}\le\frac{\sqrt{abc(ayz+bzx+cxy)}}{2S}\le\max\{MA,MB,MC\}.$$

O660. 正实数 a,b,c满足条件 $$1-2(a+b+c)+3(ab+bc+ca)-4abc=0.$$ 求证：$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+32\ge\frac{33}{a+b+c}.$$ 并说明等号成立条件.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{Mathematical Reflections 2024 年第二期征解题}
\section*{Junior Problems}
\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}
{\bf J655.}求所有素数对$(p,q)$，使得存在正整数$n$，满足$$(p^{2}q+1)^{2}=(n+1)!+n!+1.$$\vfill{\bf J656.}求证：
↪ 对任意正实数$a,b,c$，都有$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{81(a+b)(b+c)(c+a)}{16(a+b+c)^{3}}\ge
↪ 3.$$\vfill{\bf J657.}正方形$ABCD$的边长为$a$，中心为$O$，
↪ 平面上一点$M$满足$\max\{MA,MC\}=\frac{1}{\sqrt{2}}(MB+MD)$．计算$OM$的长度．\vfill{\bf J658.}求方程组的实数解：
↪ $$\begin{cases}\lg x\cdot\lg y=\lg(xy)\\\lg y\cdot\lg z=\lg(1000yz)\\\lg z\cdot\lg x=\lg(zx)\end{cases}.$$\vfill{\bf
↪ J659.}求所有非负整数对$(m,n)$，使得$2^{n}+3^{m}+4$为完全平方数．\vfill{\bf J660.}求不定方程的整数解：
↪ $$x^{2}-xy+y^{2}=\left(\frac{x+y}{2}+6\right)^{2}.$$\vfill\newpage\section*{Mathematical Reflections
↪ 2024年第二期征解题}\section*{Senior Problems}
\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}
{\bf S655.}计算：
↪ $$\sin\frac{\pi}{42}\sin\frac{5\pi}{42}\sin\frac{13\pi}{42}\sin\frac{17\pi}{42}\sin\frac{19\pi}{42}\sin\frac{31\pi}{42}.$$\vfill{\bf
↪ S656.}设$\triangle ABC$的半周长为$s$，面积为$K$．求证：以$BC$为直径的圆与$\triangle
↪ ABC$的内切圆相切当且仅当$$\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}=\frac{s}{K}.$$\vfill
{\bf S657.}求不定方程的素数解：$$p^{6}+q^{6}+r^{6}+2=s^{3}-t^{3}.$$\vfill{\bf S658.}$\triangle ABC$的三边长满足$a+b+c=2$.
↪ 求证：$$\sqrt{\frac{a}{a^{2}+bc}}+\sqrt{\frac{b}{b^{2}+ca}}+\sqrt{\frac{c}{c^{2}+ab}}\ge 2.$$\vfill{\bf
↪ S659.}非负实数$a,b,c$满足$a+b+c=1$．分别求常数$\lambda$的最大值，使得不等式成立：
↪ \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item $a^{2}+b^{2}+c^{2}+\lambda abc\le 1$．\item $a^{3}+b^{3}+c^{3}+\lambda abc\le 1$.
↪ \end{enumerate}\vfill
```

{\bf S660.} 正实数 a,b,c 满足条件 $$1-2(a+b+c)+3(ab+bc+ca)-4abc=0,$$
求证：$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+56(a+b+c)\ge 54.$$\vfill\newpage\section*{Mathematical Reflections
↪ 2024年第二期征解题}\section*{Undergraduate Problems}
\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}
{\bf U655.}设正整数n模3不余1，z是一个$2^{n+1}-1$次单位根．计算：
↪ $$\left(\mathrm{Re}(z)-\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{Re}(z^{2})-\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{Re}(z^{4})-\frac{1}{2}\right)\cdo」
↪ ts\left(\mathrm{Re}(z^{2^{n}})-\frac{1}{2}\right).$$\vfill
{\bf U656.}域$K\subset L$使得$z^{2}-z+1=0$在K中无解．已知$x,y\in L\setminus K$满足$x^{2}+2y,y^{2}+2x,xy\in K$．求证：
↪ $K(x)=K(y)$．\vfill
{\bf U657.} 计算 $$\lim_{n\to\infty}\ln^{2}(n+k)\cdot\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n}3^{-(i+j)}}{\sum\limits_{1\le i<j\le n}(ij)^{-1}}.$$\vfill
{\bf U658.} 求所有四元正整数组 (a,b,c,d)，使得 $$3a!+b=19^{c},3a+4b!=19^{d}.$$\vfill
{\bf U659.} 计算：$$\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\left((2\pi n)^{p}+2^{p}\pi^{p}n^{p-1}p\right)^{1/p}\right)-n\pi(1-p).$$\vfill
{\bf U660.} 设整数 $n\ge 2$，实数 $a\in(-2,2)$.
\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 求证：矩阵方程$X^{2}+aX+I_{n}=O_{n}$在环$M_{n}(\mathbb{C})$上有解．\item 求证：
↪ （1）中的方程在$M_{n}(\mathbb{R})$上有解当且仅当n为偶数．\item 求证：在（1）、（2）的情况中，方程均有无数个解．
↪ \end{enumerate}\vfill\newpage\section*{Mathematical Reflections 2024年第二期征解题}\section*{Olympiad Problems}
\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}
{\bf O655.}设a,b,d_{n}，$n=1,2,\cdots$为整数，其中$a\neq 0$，且和每一个d_{n}（$n\ge 1$）互质，对任意$n\ge 2$，
↪ d_{n}和d_{n+1}也互质．求证：存在$an+b$的一个排列$c_{1},c_{2},\cdots$，使得对任意正整数n，
↪ 都有d_{n}整除$c_{1}+c_{2}+\cdots+c_{n}$．\vfill
{\bf O656.}设整数$n\ge 2$．求最大的整数k，使得对满足$a_{1}\ge a_{2}\ge\cdots a_{n}\ge 0$的任意实数$a_{i}$，
↪ 都有$$\left(\frac{a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{k}}{k}\right)^{2}\ge\frac{a_{1}^{2}+a_{2}^{2}+\cdots+a_{n}^{2}}{n}.$$\vfill
{\bf O657.}将所有素数按顺序排列为$p_{1}=2,p_{2}=3,\cdots$．求证：存在由不同素数组成的数列$q_{1},q_{2},\cdots$，
↪ 使得对任意$n\ge 1$，都有$p_{n}\mid q_{1}+\cdots+q_{n}$．\vfill
{\bf O658.} 求证：存在无穷多个正整数 a，使得 $$a!+(a+2)!\mid (2a+2)!.$$\vfill
{\bf O659.}设M为$\triangle ABC$内部任意一点．x,y,z分别为点M到三边BC,CA,AB的距离，S为$\triangle ABC$的面积．
↪ 求证：$$\min\{MA,MB,MC\}\le\frac{\sqrt{abc(ayz+bzx+cxy)}}{2S}\le\max\{MA,MB,MC\}.$$\vfill
{\bf O660.} 正实数 a,b,c 满足条件 $$1-2(a+b+c)+3(ab+bc+ca)-4abc=0.$$
求证：$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+32\ge\frac{33}{a+b+c}.$$
并说明等号成立条件．\vfill