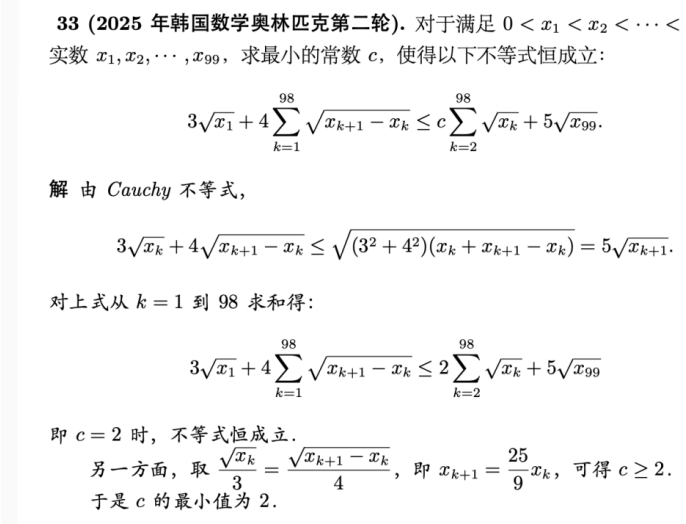
一分钟做不等式系列（12）——2025 年韩国数学奥林匹克第二轮

2025-11-13　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5127aac266b39915

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。



33 (2025 年韩国数学奥林匹克第二轮). 对于满足 $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{99}$ 的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{99}$，求最小的常数 c，使得以下不等式恒成立：

$$3\sqrt{x_1} + 4\sum_{k=1}^{98}\sqrt{x_{k+1} - x_k} \le c\sum_{k=2}^{98}\sqrt{x_k} + 5\sqrt{x_{99}}.$$

解 由 *Cauchy* 不等式，

$$3\sqrt{x_k} + 4\sqrt{x_{k+1} - x_k} \le \sqrt{(3^2 + 4^2)(x_k + x_{k+1} - x_k)} = 5\sqrt{x_{k+1}}.$$

对上式从 $k = 1$ 到 98 求和得：

$$3\sqrt{x_1} + 4\sum_{k=1}^{98}\sqrt{x_{k+1} - x_k} \le 2\sum_{k=2}^{98}\sqrt{x_k} + 5\sqrt{x_{99}}$$

即 $c = 2$ 时，不等式恒成立.

另一方面，取 $\dfrac{\sqrt{x_k}}{3} = \dfrac{\sqrt{x_{k+1} - x_k}}{4}$，即 $x_{k+1} = \dfrac{25}{9}x_k$，可得 $c \ge 2$.

于是 c 的最小值为 2.

题目来源：2025 韩国数学奥林匹克第二轮中文翻译