2021 年普林斯顿数学竞赛（PUMaC）组合组

2022-04-15　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_515688b8253cca0c

A 组

1. 在正八边形中随机选择两条不同的对角线，设这两条对角线在正八边形内部相交的概率为 $\frac{a}{b}$，a 和 b 为互质的正整数，求 $a+b$ 的值.

2. 18 个人排成一队进入杂货店，其中 5 人戴黑色口罩，6 人戴灰色口罩，7 人戴白色口罩. 假设所有人按照随机的顺序排队，相邻且戴不同颜色口罩的二人组个数的期望为 $\frac{a}{b}$，a 和 b 为互质的正整数，求 $a+b$ 的值.

3. Nelson 让他的朋友从一栋 12 英尺高的建筑物上扔下他独特的弹力球，而 Nelson 只会在每次球弹到最高点时接住球. 在每次反弹中，弹力球能达到的最高点有 80% 的概率为上一次最高点高度的 $\frac{1}{3}$，有 20% 的概率为上一次最高点高度的 3 倍（初始高度为 12 英尺）. 若 Nelson 只能接住 4 英尺高度的球，且他会尽快接住球. 设 Nelson 在球恰好反弹 13 次时接住的概率为 $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times 11^e$，其中 a，b，c，d，e 均为整数. 求 $|a|+|b|+|c|+|d|+|e|$ 的值.

4. 编号为 1，2，$\cdots$，n 的 n 片睡莲从左到右拍成一行. 一只青蛙随机选择一片睡莲开始，每过一秒跳到一片相邻的睡莲上. 如果存在两片睡莲，当青蛙在其上时，向右跳的概率是向左跳的两倍. 且在有限秒之后，存在两片睡莲 A 和 B，使得青蛙在 A 上的概率为在 B 上概率的 1000 倍以上. 求最小的 n，使得该情况一定会发生.

5. 一台普林斯顿老虎机上有 100 张图片，每张出现的概率相同，其中一张图片为老虎. Alice 和 Bob 独立地进行游戏，直到看见老虎的图片后停止. 已知 Bob 所用时间为 Alice 的两倍，设 Alice 的游戏次数的期望为 $\frac{a}{b}$，a 和 b 为互质的正整数，求 $a+b$ 除以 1000 的余数.

6. Alice，Bob 和 Carol 进行一个游戏. 每一回合，他们其中一人说出 3 名玩家的名字之一，从 {Alice,Bob,Carol} 中随机选择. 游戏从 Alice 开始，Bob 第二，Carol 第三，接下来重复这个顺序. 设首次出现三个名字都被说出 2 次时的回合数期望为 E. 设 $E=\frac{m}{n}$，m 和 n 为互质的正整数，求 $m+n$ 的值.

7. Cassidy 有一个由 0 和 1 构成的 n 位字符串，其中 n 为正整数，每次 Cassidy 选择以下两个操作之一：

- 将第一位改变（即将 0 变成 1，或者将 1 变成 0）；
- 将第一个 1 的后一位改变.

设 M 为 Cassidy 将 $11\cdots1$ 改变为 $00\cdots0$（均为 12 位）所需要的最少次数，N 为最终能改变为 $00\cdots0$ 的 12 为字符串的个数. 求 $M+N$ 的值.

普林斯顿大学的物理学家们正在尝试使用以下实验分析原子纠缠. 开始时, 空间中只有一个原子, 它按照以下程序开始分裂. 若在 n 分钟后存在原子 a_1, $\cdots$, a_N, 在下一分钟每个原子 a_i 分裂成四个新的原子 $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$, $a_i^{(3)}$, $a_i^{(4)}$. 原子 $a_i^{(j)}$ 和 $a_j^{(k)}$ 是纠缠的, 当且仅当原子 a_i 和 a_j 在第 n 分钟后是纠缠的. 此外, 对任意 $1 \le i, k \le N$, $j \in \{1, 2, 3\}$, 原子 $a_i^{(j)}$ 和原子 $a_k^{(j+1)}$ 也是纠缠的. 在第一分钟后有 4 个原子, 在第二分钟后有 16 个原子, 依此类推.

物理学家们对其中有奇数对纠缠原子的四原子无序集 $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ 感兴趣. 请问: 3 分钟后有多少个这样的四原子无序集?

注: 请注意原子纠缠不是传递的. 换言之, 若 a_i 和 a_j 纠缠, a_j 和 a_k 纠缠, 不意味着 a_i 和 a_k 纠缠.

B 组

1. 如果在一个非空单词中, 元音字母（A、E、I、O、U）和辅音字母（其余所有字母）交替出现, 则称它为可发音词. 不重复地使用字母 P、U、M、A、C, 最多能组成多少个可发音词? 单词的长度可以小于 5.

2. Neel 和 Roshan 将前往纽瓦克自由国际机场各自搭乘航班. Neel 计划在早上 5:30 到 6:30 之间的某个随机时间到达, 而 Roshan 计划在早上 5:40 到 6:40 之间的某个随机时间到达. 两人想在机场安检前短暂见面. 因此, 他们约定每个人在到达机场后将等待 n 分钟, 再通过安检. 设使得他们至少有 50% 的概率见面的 n 的最小值为 $a + b\sqrt{c}$ 的形式, 其中 a, b, c 均为整数, 且 c 无 1 以外的平方因子. 求 $a + b + c$.

3. 同 A 组第 1 题

4. 同 A 组第 2 题

5. 同 A 组第 3 题

6. 同 A 组第 4 题

7. 同 A 组第 5 题

8. 同 A 组第 6 题