2021 年普林斯顿数学竞赛（PUMaC）团体赛

2022-04-04　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_51a8ec66389d5dea

团体赛

1. 一个邪恶的女巫在制作毒药. 为了使药水起作用，毒箭蛙的数量不能超过 5，狼牙的数量必须是偶数，龙鳞的数量必须是 6 的倍数，她也可以放入任意数量的虎钉. 已知此毒药共有 2021 份材料，女巫有多少种方式添加材料，使得毒药起效?

2. k 为满足如下条件的最小正整数：对任意 $1 \le x \le y \le z \le 12$，$k\dfrac{\gcd(x,y)\gcd(y,z)}{\operatorname{lcm}(x,y^2,z)}$ 均为正整数. 设 k' 为 k 的约数个数，求 k' 的约数个数.

3. 设 $f(N) = N\left(\dfrac{9}{10}\right)^N$，记 N 跑遍所有正整数时，$f(N)$ 的最大值为 $\dfrac{m}{n}$. 如果 m 和 n 为互质的正整数，求 $m+n$ 除以 1000 的余数.

4. Abby 和 Ben 的弟弟 Carl 想要糖果. Abby 有 7 个不同的糖果，Ben 有 15 个不同的糖果. 他们打算给 Carl 一些糖果. 由于 Ben 想成为比 Abby 更好的哥哥，他打算比 Abby 多给 Carl2 块糖果. 设 Abby 和 Ben 给 Carl 糖果的不同方式共有 N 种，求 N 的正约数个数.

5. 给定实数 t，满足 $0 < t < 1$，定义实值函数 $f(t,\theta) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} t^{|n|}\omega^n$，其中 $\omega = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. 对 $\theta \in [0, 2\pi)$，极坐标方程 $r(\theta) = f(t,\theta)$ 表示一个左焦点位于原点的椭圆 E_t. 设椭圆 E_t 的面积为 $A(t)$. 已知 $A(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{a\pi}{b}$，其中 a 和 b 为互质的正整数. 求 $100a+b$.

6. Jack 在玩一个游戏，首先，他掷一枚六面等概率的骰子，得到一个数字 n. 然后，他开始掷硬币，如果掷出连续 n 次正面，则取得胜利；如果掷出连续 n 次反面，则他再掷一次骰子，并重新进行游戏. Jack 在取得胜利前掷硬币的次数的期望是多少?

7. 多项式 $f(x) = x^8 + x^7 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$ 的所有根均为单位根. 称实数 $r \in [0,1)$ 是“好的”，如果 $e^{2i\pi r} = \cos 2\pi r + i\sin 2\pi r$ 为多项式 f 的一个根，且 $e^{2i\pi r}$ 的虚部为正. 设 S 为所有“好的”实数 r 之和，$S = \dfrac{p}{q}$，其中 p 和 q 为互质的正整数，求 $p+q$.

8. 新一届的 PUMaC 比赛将邀请 2020 个学生，编号为 1，2，$\cdots$，2020. 开始时，学生们被分为 20 组，每组 101 人，学生被分到每一组的概率相同. 在每一组中，编号最小的学生获胜，获胜者进入第二轮. 在进入第二轮的 20 名学生中，随机从中选出一个冠军. 设冠军编号的期望为 $\dfrac{a}{b}$，其中 a 和 b 为互质的正整数，求 $a+b$.

9. 设 AX 为半径为 10 的圆 Ω 的一条直径. 点 C 在 Ω 上，且 $AC = 16$. 点 D 为 Ω 上另一点，满足 $CX = CD$. 设点 D' 为点 D 关于 AC 中点的对称点，点 X' 为点 X 关于 CD 中点的对称点. 若 $\triangle CD'X'$ 的面积为 $\dfrac{p}{q}$，其中 p 和 q 为互质的正整数，求 $p+q$.

10. 求使得 $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ 为整数，且满足 $1 \le a \le b \le 100$ 的正整数组 (a,b) 的组数.

11. $\triangle ABC$ 满足 $AB=10$，$BC=14$，$AC=16$. 设 $\triangle DEF$ 为满足以下条件的面积最小的三角形：DE 平行于 AB，EF 平行于 BC，DF 平行于 AC，且 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的外接圆内切. 直线 DA 和 $\triangle ABC$ 的外接圆再次交于点 X. 求 AX^2.

12. 给定整数 a_0，定义实数列 a_0，a_1，$\cdots$，满足对任意 $i\geq 1$，都有 $a_i^2=1+ia_{i-1}^2$. 若对某个 a_0，a_j 能为整数，则称下标 j 是好的. 求区间 $[0,99]$ 中所有不好的下标 j 之和.

13. 给定正整数 n 及其质因数分解式 $p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$，定义 $f(n)=\sum\limits_{i=1}^{k}p_ie_i$. 设 M 为满足 $f(M)=2023$ 的最大奇数，m 为满足 $f(m)=2023$ 的最小奇数. 设 $\dfrac{M}{m}=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_l^{e_l}$，其中 e_i 为非零整数，p_i 为质数. 求 $|\sum\limits_{i=1}^{l}(p_i+e_i)|$.

14. Heron 将要观看一部共有 n 集的节目，该节目每天发布一集. Heron 想在首播那天观看第一集和最后一集，他不想连续两天不看该节目，且可以在一天内观看任意多集. 用 $f(n)$ 表示 Heron 观看该节目的总方法数，设 N 为满足 $f(n)\equiv 2\pmod 3$ 的第 2021 小的 n. 求 N 的值.

15. 锐角 $\triangle ABC$ 满足 $\angle BAC=70^\circ$，$\angle ABC=60^\circ$. 设 D，E 分别为 B，C 在对边的垂足，H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 设 F 为 $\triangle ABC$ 外接圆上劣弧 AB 上的一点，且满足 $\angle FAB=10^\circ$，G 为 H 到 AF 的垂足. 若 $I=BF\cap EG$，$J=CF\cap DG$，求 $\angle GIJ$ 的度数.