数学竞赛每日一练第 12 期解答

2021-06-15 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_51d4e2f53e78ddcf

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，

$$a_{n+1}=\begin{cases}x_n+n, x_n\leq n\\ x_n-n, x_n>n\end{cases}$$

求满足不等式 $a_r<r\leq 3^{2017}$ 的正整数 r 的个数.

解答（PDF 中已展开）

解答由数列的定义可知 $a_1=1$，$a_2=2$. 假设对某个整数 $r\geq 2$ 有 $a_t=r$，我们证明对 $t=1,\cdots,r-1$，有

$$a_{r+2t-1}=2r+t-1>r+2t-1$$

$$a_{r+2t}=r-t<r+2t$$

对 t 归纳证明.

当 $t=1$ 时，由于 $a_r=r\geq r$，由定义，

$$a_{r+1}=a_r+r=r+r=2r>r+1$$

$$a_{r+2}=a_{r+1}-(r+1)=2r-(r+1)=r-1<r+2$$

结论成立.

设结论对某个 $1\leq t\leq r-1$ 成立，则由定义

$$\begin{aligned}a_{r+2t+1}=&a_{r+2t}+(r+2t)\\=&r-t+r+2t\\=&2r+t\\>&r+2t+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{r+2t+2}=&a_{r+2t+1}-(r+2t+1)\\=&2r+t-(r+2t+1)\\=&r-t-1\\<&r+2t+2\end{aligned}$$

即结论对 $t+1$ 也成立. 由数学归纳法知，结论对所有 $t=1,2,\cdots,r-1$ 成立，特别当 $t=r-1$ 时，由 $a_{3r-2}=1$，从而

$$a_{3r-1}=a_{3r-2}+(3r-2)=3r-1$$

若将所有满足 $a_r=r$ 的正整数 r 从小到大记为 r_1，r_2，$\cdots$，则由上面的结论可知 $r_1=1$，$r_2=2$，$r_{k+1}=3r_k-1$，$k=2,3,\cdots$．由此可知，

$$r_{k+1}-\frac{1}{2}=3\left(r_k-\frac{1}{2}\right),k=1,\cdots,m-1$$

从而

$$r_m=3^{m-1}\left(r_1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3^{m-1}+1}{2}$$

由于

$$r_{2018}=\frac{3^{2017}+1}{2}<3^{2017}<\frac{3^{2018}+1}{2}=r_{2019}$$

在 1，2，$\cdots$，3^{2017} 中满足 $a_r=r$ 的数 r 共有 2018 个，为 r_1，r_2，$\cdots$，r_{2018}.

于是，对每个 $k=1,2,\cdots,2017$，r_k+1，r_k+2，$\cdots$，$3r_k-2$ 中恰有一半满足 $a_r<r$．由于 $r_{2018}+1=\dfrac{3^{2017}+1}{2}$ 与 3^{2017} 均为奇数，而在 $r_{2018}+1$，$\cdots$，3^{2017} 中，奇数均满足 $a_r>r$，偶数均满足 $a_r<r$，其中的偶数比奇数少 1 个．因此满足 $a_r<r\leq 3^{2017}$ 的正整数 r 的个数为

$$\frac{1}{2}\left(3^{2017}-2018-1\right)=\frac{3^{2017}-2019}{2}.$$