证明两多项式相同的几个方法

2021-07-15 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_51e89be5bd25b1f3

前几天讲多项式时，我问了学生一个问题：最少通过几次整数赋值，能够证明两个整系数多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相同?

这个问题有些宽泛，因为还不知道这两个多项式的其余信息，比如最高次数，系数的分布情况等等。

如果已知这两个多项式的最高次数，则答案显然为其中较大的那个再加 1.

而如果已知这两个多项式系数的上下界呢? 事实上，只需要一次就可以了。(读者可以先自行思考如何做到)

我们来考虑应该赋怎样的整数值，才能做到一次就能证明这两个多项式相等。容易知道，所赋的值应该会比较大，因为如果 $f(x)\neq g(x)$，则 $f(x)-g(x)$ 非零多项式，其在 $x\to+\infty$ 时也会趋于无穷. 这样，当我们赋足够大的 x 时，总会让 $f(x)\neq g(x)$.

这就产生了以下的问题:

> 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是整系数多项式. 证明: $f(x)=g(x)$ 的充要条件是存在一个整数 t，使得 $f(t)=g(t)$，这里 t 比 $f(x)$、$g(x)$ 的任意一个系数的绝对值的两倍都大.

证明: 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\,,$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0.$$

其中 $a_i,b_j\in\mathbb{Z}$，$a_n,b_m\neq0$. 必要性显然，下证充分性.

若存在 $t\in\mathbb{Z}$，使得

$$a_nt^n+\cdots+a_0=b_mt^m+\cdots+b_0$$

不妨设 $n\geq m$，则有

$$-c_nt^n=c_{n-1}t^{n-1}+\cdots+c_0$$

其中 $c_i=a_i-b_i$，(若 $i>m$，定义 $b_i=0$)，$i=0,1,\cdots,n$.

由题意知

$$t>2\max\{|a_i|,|b_i|\}$$

$$\geq \max\{a_i, b_i\} - \min\{a_i, b_i\}$$
$$\geq |b_i - a_i| = |c_i|$$

由整数的离散性知：$|c_i| \leq t - 1$.

于是

$$\begin{aligned}|c_n t^n| &= |c_{n-1}t^{n-1} + c_{n-2}t^{n-2} + \cdots + c_0| \\ &\leq |c_{n-1}|t^{n-1} + |c_{n-2}|t^{n-2} + \cdots + |c_0| \\ &\leq (t-1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + 1) \\ &= t^n - 1 \\ &< t^n\end{aligned}$$

只能有 $c_n = 0$，即 $a_n = b_n \neq 0$. 这得到了 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的次数和首项系数均相同.

接下来，在等式两边减去 $a_n t^n$，进行同样的操作，即可得到 $a_{n-1} = b_{n-1}$，……，$a_0 = b_0$. 于是 $f(x) = g(x)$，证毕.

如果我们对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的系数作进一步限制，让其均为非负整数，将有一个更有意思的方法.

第一步，令 $x = 1$，得到 $f(1)$ 与 $g(1)$ 的值，此即为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的系数之和. 我们有 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的每一项系数均小于 $N = \max\{f(1), g(1)\} + 1$.

第二步，令 $x = N$，若 $f(N) = g(N)$，则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相同.

提示： 这可以从 $f(N)$ 和 $g(N)$ 在 N 进制下的表示唯一而得.

并且由此方法，我们也能通过两次赋值，直接得到非负整系数多项式 $f(x)$ 的各项系数.

最后抖个机灵。

如果不要求赋值为整数，并且保证给出的多项式值都是精确值的话，还可以令 $x = \pi$. 这样多项式值就被整整齐齐地排列成

$$f(\pi) = a_n\pi^n + a_{n-1}\pi^{n-1} + \cdots + a_0$$

的形式了.

这是因为 π 是超越数，其不是任意整系数多项式的根. 故 $f(\pi)$ 的表达式无法得到任何化简.