2023 年英国帝国理工-剑桥数学竞赛（第一轮）

2024-01-10　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_51e8b692b8a77ab0

ICMC 全称 Imperial-Cambridge Mathematics Competition，现在的翻译是“帝国理工-剑桥数学竞赛”。该竞赛起源于帝国理工大学，之前的名字是 Imperial College Mathematics Competition；随着剑桥大学学生参与到赛事的组织和运营中来，这个比赛在名称上也做出了调整。

ICMC 旨在为本科和硕士在读学生提供一个享受非书本式的、有竞争性的数学活动。竞赛由伦敦帝国理工学院和剑桥大学的学生和毕业生组织和管理。自 2017 年以来，不少来自英国及英国以外地区的本科学生参加了包括两轮个人比赛和团队比赛在内的活动。

ICMC 欢迎来自所有学科的本科和硕士在读学生参加。虽然试卷上的问题可能需要数学本科一年级课程的知识，试卷设计的初衷在于测试参赛者的创造性问题解决能力，而不是他们的知识水平。

2023 年英国帝国理工-剑桥数学竞赛（ICMC）——第一轮

程国根　译

1. 设 F_n 为斐波那契数列的第 n 项．求证：3^{2023} 整除

$$3^2 \cdot F_4 + 3^3 \cdot F_6 + 3^4 \cdot F_8 + \cdots + 3^{2023} F_{4046}.$$

2. 弗雷迪从欧氏平面的原点开始，每次都可以跳跃一个正整数的距离到达另一个整点，但是跳跃轨迹不平行于任一坐标轴．弗雷迪能否在不超过 2023 次跳跃后到达任意给定的整点?

3. 社交媒体平台 Mathsenger 上有 105 个用户，每对用户之间都有一条直接交流的信息通道．求证：可以给每个信息通道分配 100 个加密密钥中的一个，使得不存在 4 个用户，他们之间的 6 条信息通道被分配到相同的加密密钥．

4. 点 A,B,C,D 在一个直径为 1 的球面上，求四面体 $ABCD$ 体积的最大值.

5. (1) 是否存在一个非线性的整系数多项式 $P(x)$ 和一个整数 N，使得所有大于 N 的整数都能表示为 $\gcd(P(a),P(b))$ 的形式? 其中 a,b 为正整数，且 $a>b$.

(2) 是否存在一个非线性的整系数多项式 $Q(x)$ 和一个整数 M，使得所有大于 M 的整数都能表示为 $Q(a)-Q(b)$ 的形式? 其中 a,b 为正整数，且 $a>b$.

6. 设函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个双射. 求证：下面两式中至少一个成立：

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+f(n)}=\infty;\quad \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{f(n)}\right)=\infty.$$

2023 年英国帝国理工-剑桥数学竞赛（ICMC）——第一轮

程国根　译

1. 设 F_{n}为斐波那契数列的第 n项. 求证：3^{2023}整除 $$3^2\cdot F_4+3^3\cdot F_6+3^4\cdot F_8+\dots+3^{2023}F_{4046}.$$

2. 弗雷迪从欧氏平面的原点开始，每次都可以跳跃一个正整数的距离到达另一个整点，但是跳跃轨迹不平行于任一坐标轴. 弗雷迪能否在不超过 2023次跳跃后到达任意给定的整点?

3. 社交媒体平台 Mathsenger 上有 105个用户，每对用户之间都有一条直接交流的信息通道. 求证：可以给每个信息通道分配 100个加密密钥中的一个，使得不存在 4个用户，他们之间的 6条信息通道被分配到相同的加密密钥.

4. 点 A,B,C,D在一个直径为 1的球面上，求四面体 $ABCD$体积的最大值.

5.

1. 是否存在一个非线性的整系数多项式 $P(x)$和一个整数 N，使得所有大于 N的整数都

能表示为 $\gcd(P(a),P(b))$的形式？其中 a,b为正整数，且 $a>b$.

2. 是否存在一个非线性的整系数多项式 $Q(x)$和一个整数 M，使得所有大于 M的整数都能表示为 $Q(a)-Q(b)$的形式？其中 a,b为正整数，且 $a>b$.

6. 设函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$是一个双射. 求证：下面两式中至少一个成立：$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+f(n)}=\infty;\quad\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{f(n)}\right)=\infty.$$

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2023年英国帝国理工-剑桥数学竞赛（ICMC）——第一轮}\flushright 程国根\quad 译\ex
↪ 设$F_{n}$为斐波那契数列的第$n$项. 求证：$3^{2023}$整除$$3^2\cdot F_4+3^3\cdot F_6+3^4\cdot
↪ F_8+\dots+3^{2023}F_{4046}.$$\vfill\ex 弗雷迪从欧氏平面的原点开始，每次都可以跳跃一个正整数的距离到达另一个整点，
↪ 但是跳跃轨迹不平行于任一坐标轴. 弗雷迪能否在不超过$2023$次跳跃后到达任意给定的整点？\vfill\ex
↪ 社交媒体平台Mathsenger上有$105$个用户，每对用户之间都有一条直接交流的信息通道. 求证：
↪ 可以给每个信息通道分配$100$个加密密钥中的一个，使得不存在$4$个用户，
↪ 他们之间的$6$条信息通道被分配到相同的加密密钥. \vfill\newpage\ex 点$A,B,C,D$在一个直径为$1$的球面上，
↪ 求四面体$ABCD$体积的最大值. \vfill\ex \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item
↪ 是否存在一个非线性的整系数多项式$P(x)$和一个整数$N$，使得所有大于$N$的整数都能表示为$\gcd(P(a),P(b))$的形式？
↪ 其中$a,b$为正整数，且$a>b$. \item 是否存在一个非线性的整系数多项式$Q(x)$和一个整数$M$，
↪ 使得所有大于$M$的整数都能表示为$Q(a)-Q(b)$的形式？其中$a,b$为正整数，且$a>b$. \end{enumerate}\vfill\ex
↪ 设函数$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$是一个双射. 求证：下面两式中至少一个成立：$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}」
↪ {n+f(n)}=\infty;\quad\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{f(n)}\right)=\infty.$$\vfill
```