2021 年美国初中数学奥林匹克（USAJMO）

2021-05-02　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_51f7852ca428bdf4

昨天发的时候，第一题的公式打错了。给大家带来了不便，敬请谅解。以后一定会仔细审查的。

第一天

1. 记 $\mathbb{N}$ 为正整数集，求所有函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对于任意正整数 a 和 b，有

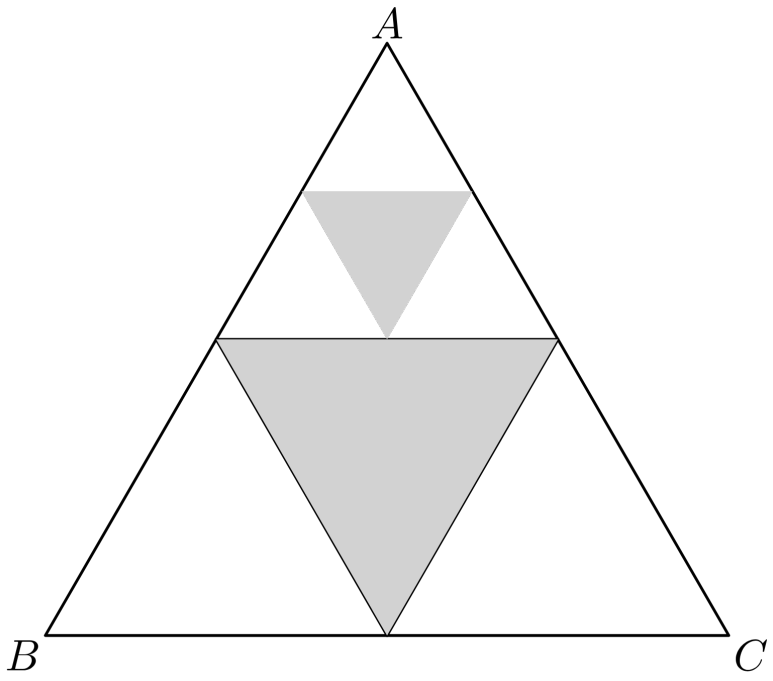
$$f(a^2+b^2)=f(a)f(b),\ f(a^2)=f(a)^2.$$

2. 以锐角 $\triangle ABC$ 三边为边向外作矩形 BCC_1B_2，CAA_1C_2 和 ABB_1A_2．如果

$$\angle BC_1C+\angle CA_1A+\angle AB_1B=180^\circ.$$

求证：B_1C_2，C_1A_2，A_1B_2 三线共点.

3. 给定边长为 $L>0$ 的等边三角形 Δ．在 Δ 内互不重叠地放置 n 个边长为 1 的正三角形，其三边与 Δ 的三边分别平行，但方向相反．（下图给出了 $n=2$ 时的一个例子.）



求证：

$$n\le\frac{2}{3}L^2.$$

第二天

1. Carina 有三个分别被标记为 A, B, C 的钉子, 起初它们都在坐标平面的原点. 每一次操作中, Carina 可以将其中一个钉子移动到距离为 1 的相邻格点. 要使 $\triangle ABC$ 的面积为 2021, Carina 至少需要多少次操作? (格点指坐标平面中的点 (x, y), 其中 x 和 y 均为整数, 不要求一定为正.)

2. 一个有限的整数集 S 具有以下性质: 对于任意 $s \in S$, 以及 s 的每个正因子 d, 存在唯一的 $t \in S$, 满足 $\gcd(s, t) = d$. (s 和 t 可以相等) 求 S 中元素个数的所有可能值.

3. $n \geq 4$ 为正整数. 求如下 $2n$ 元方程组的所有正实数解:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{a_{2n}} + \frac{1}{a_2}, & a_2 &= a_1 + a_3, \\
a_3 &= \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4}, & a_4 &= a_3 + a_5, \\
a_5 &= \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6}, & a_6 &= a_5 + a_7 \\
&\vdots & &\vdots \\
a_{2n-1} &= \frac{1}{a_{2n-2}} + \frac{1}{a_{2n}}, & a_{2n} &= a_{2n-1} + a_1
\end{aligned}
$$