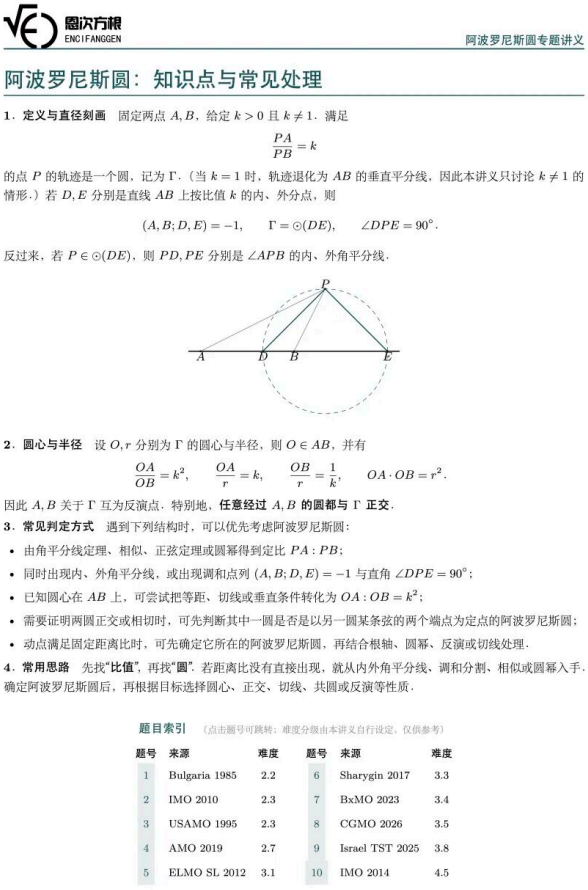
资料分享：阿波罗尼斯圆专题讲义

2026-08-22　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_529716e36a5f2b36

本文为图片版：正文为 3 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

部分内容预览：



恩次方根 ENCIFANGGEN　阿波罗尼斯圆专题讲义

阿波罗尼斯圆：知识点与常见处理

1．定义与直径刻画　固定两点 A,B，给定 $k>0$ 且 $k\neq 1$．满足

$$\frac{PA}{PB}=k$$

的点 P 的轨迹是一个圆，记为 Γ．（当 $k=1$ 时，轨迹退化为 AB 的垂直平分线，因此本讲义只讨论 $k\neq 1$ 的情形．）若 D,E 分别是直线 AB 上按比值 k 的内、外分点，则

$$(A,B;D,E)=-1,\qquad \Gamma=\odot(DE),\qquad \angle DPE=90^\circ.$$

反过来，若 $P\in\odot(DE)$，则 PD,PE 分别是 $\angle APB$ 的内、外角平分线．

2．圆心与半径　设 O,r 分别为 Γ 的圆心与半径，则 $O\in AB$，并有

$$\frac{OA}{OB}=k^2,\qquad \frac{OA}{r}=k,\qquad \frac{OB}{r}=\frac{1}{k},\qquad OA\cdot OB=r^2.$$

因此 A,B 关于 Γ 互为反演点．特别地，**任意经过 A,B 的圆都与 Γ 正交**．

3．常见判定方式　遇到下列结构时，可以优先考虑阿波罗尼斯圆：

- 由角平分线定理、相似、正弦定理或圆幂得到定比 $PA:PB$；
- 同时出现内、外角平分线，或出现调和点列 $(A,B;D,E)=-1$ 与直角 $\angle DPE=90^\circ$；
- 已知圆心在 AB 上，可尝试把等距、切线或垂直条件转化为 $OA:OB=k^2$；
- 需要证明两圆正交或相切时，可先判断其中一圆是否是以另一圆某条弦的两个端点为定点的阿波罗尼斯圆；
- 动点满足固定距离比时，可先确定它所在的阿波罗尼斯圆，再结合根轴、圆幂、反演或切线处理．

4．常用思路　先找“**比值**”，再找“**圆**”．若距离比没有直接出现，就从内外角平分线、调和分割、相似或圆幂入手．确定阿波罗尼斯圆后，再根据目标选择圆心、正交、切线、共圆或反演等性质．

题目索引　（点击题号可跳转；难度分级由本讲义自行设定，仅供参考）

题号	来源	难度	题号	来源	难度
1	Bulgaria 1985	2.2	6	Sharygin 2017	3.3
2	IMO 2010	2.3	7	BxMO 2023	3.4
3	USAMO 1995	2.3	8	CGMO 2026	3.5
4	AMO 2019	2.7	9	Israel TST 2025	3.8
5	ELMO SL 2012	3.1	10	IMO 2014	4.5

1

题目 8

查看解析 →

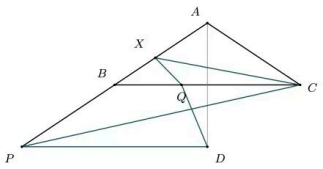
2026 中国女子数学奥林匹克（CGMO）· 第 3 题

在三角形 ABC 中，$\angle BAC > 90^\circ$．点 D 是 A 关于 BC 的对称点．点 P 在 AB 的延长线上，且 P, B, A 依次共线．$\angle ACP$ 的平分线交 AB 于点 X．边 BC 上的点 Q 满足

$$\angle XQB + \angle AXC = 90^\circ.$$

证明

$$\angle PDQ + \angle BAC = 180^\circ.$$



解析 8

难度：3.5　返回题目 →

2026 中国女子数学奥林匹克（CGMO）· 第 3 题

题目回顾　在三角形 ABC 中，$\angle BAC>90^\circ$．点 D 是 A 关于 BC 的对称点．点 P 在 AB 的延长线上，且 P,B,A 依次共线．$\angle ACP$ 的平分线交 AB 于点 X．边 BC 上的点 Q 满足 $\angle XQB+\angle AXC=90^\circ$．证明 $\angle PDQ+\angle BAC=180^\circ$．

分析．作 $\angle ACP$ 的外角平分线 CE．由内、外角平分线定理，X,E 是直线 AP 上对应的内、外分点，因此 C,X,E 位于以 A,P 为定点的阿波罗尼斯圆 Γ 上．由 $\angle BAC>90^\circ$ 且 P,B,A 依次共线，有 $CP>CA$，所以 $k=CA/CP<1$．题设的互余关系可进一步证明 $Q\in\Gamma$．随后用圆心、半径的比例关系得到一组边比，再用圆心角得到对应夹角，与对称关系组成边角边相似．

证明．

设 $\angle ACP$ 的外角平分线与直线 AB 交于 E．由内、外角平分线定理，

$$\frac{AX}{XP}=\frac{AE}{EP}=\frac{AC}{CP}=k. \tag{1}$$

又 $\angle CAP=\angle BAC>90^\circ$，故在 $\triangle ACP$ 中 $CP>CA$，于是 $0<k<1$．因此 C,X,E 同在以 A,P 为定点、距离比为 k 的阿波罗尼斯圆 Γ 上；XE 为直径，记圆心为 F．

因为 $\angle XCE=90^\circ$，且 A,X,E 共线，

$$\angle CEX=90^\circ-\angle AXC=\angle XQB.$$

又 B,Q,C 共线，故 $\angle XQC+\angle XEC=180^\circ$，从而 $Q\in\Gamma$，即 $FQ=FX$．由阿波罗尼斯圆的圆心与半径公式及 $CD=CA$，

$$\frac{AF}{FQ}=k=\frac{AC}{CP}=\frac{CD}{CP}. \tag{2}$$

由 C,X,E,Q 共圆，

$$\angle XEQ=\angle XCQ=\angle BCX.$$

而 F 是 Γ 的圆心，故

$$\angle AFQ=\angle XFQ=2\angle XEQ=2\angle BCX. \tag{3}$$

设 $\angle BCA=\phi$，$\angle BCP=\psi$．由于 $X\in AB$，有 $\phi>\psi$；又 CD 与 CA 关于 BC 对称，而 CX 平分 $\angle ACP$，故

$$\angle BCX=\frac{\phi-\psi}{2},\qquad \angle DCP=\phi-\psi=2\angle BCX. \tag{4}$$

由 (2)(3)(4)，按边角边判定 $\triangle FAQ\sim\triangle CDP$，因此

$$\angle FAQ=\angle CDP. \tag{5}$$

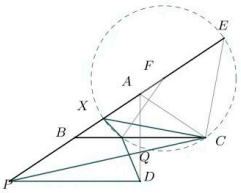
又因 A,D 关于 BC 对称且 $C,Q\in BC$，有 $\angle CDQ=\angle CAQ$．同时 A,F,E 共线，且射线 AC 位于 $\angle FAQ$ 内部．结合 (5)，

$$\begin{aligned}\angle PDQ&=\angle CDP-\angle CDQ\\&=\angle FAQ-\angle CAQ\\&=\angle CAE\\&=180^\circ-\angle BAC.\end{aligned}$$

故

$$\boxed{\angle PDQ+\angle BAC=180^\circ}.$$

□



虚线圆为以 A,P 为定点的阿波罗尼斯圆 Γ．

注．这里同时使用了内、外角平分线构造阿波罗尼斯圆以及圆心、半径的比例公式．先说明 $k<1$，可使图中的点序和圆心位置更明确．