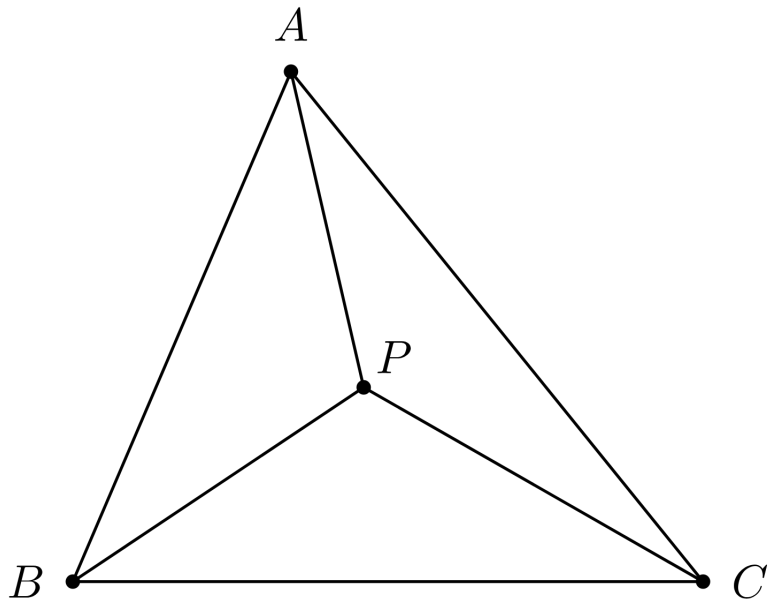
从布洛卡角的两个性质到两道早年 IMO 试题

2022-11-18　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_566089c3b7822d30

在给学生讲三角函数与解三角形时，我给学生介绍了布洛卡 (Brocard) 点的概念及两个和布洛卡角有关的三角恒等式：

> $\triangle ABC$ 内部一点 P 满足 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$，则称 P 为 $\triangle ABC$ 的布洛卡点，α 为 $\triangle ABC$ 的布洛卡角.



注：满足 $\angle PBA=\angle PCB=\angle PAC$ 的点 P 也称为 $\triangle ABC$ 的布洛卡点，一般以第一、第二区分.

下面介绍布洛卡点的两个最基本性质：

1. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 B}+\dfrac{1}{\sin^2 C}$

证明：

$\angle APB=180^\circ-\angle PAB-\angle PBA$

$=180^\circ-\angle PBC-\angle PBA=180^\circ-B$

同理 $\angle BPC=180^\circ-C$，$\angle CPA=180^\circ-A$.

于是 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin A}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ-A)}=\dfrac{\sin\angle PCA}{\sin\angle CPA}=\dfrac{PA}{AC}$

同理 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin B}=\dfrac{PB}{BA}$，$\dfrac{\sin\alpha}{\sin C}=\dfrac{PC}{BC}$.

由

$$
\begin{aligned}
&S_{\triangle ABC}\\
=&S_{\triangle APB}+S_{\triangle BPC}+S_{\triangle CPA}\\
=&\frac{1}{2}AB\cdot AP\sin\alpha+\frac{1}{2}BC\cdot BP\sin\alpha+\frac{1}{2}CA\cdot CP\sin\alpha\\
=&\frac{1}{2}\sin\alpha(AB\cdot AP+BC\cdot BP+CA\cdot CP)\\
=&\frac{1}{2}\sin\alpha\left(AB\cdot AC\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin A}+BC\cdot AB\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin B}+CA\cdot BC\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin C}\right)\\
=&\frac{1}{2}\sin^2\alpha\left(\frac{bc}{\sin A}+\frac{ca}{\sin B}+\frac{ab}{\sin C}\right)\\
=&\sin^2\alpha\left(\frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{\sin^2 A}+\frac{\frac{1}{2}ca\sin B}{\sin^2 B}+\frac{\frac{1}{2}ab\sin C}{\sin^2 C}\right)\\
=&\sin^2\alpha\cdot S_{\triangle ABC}\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\right)
\end{aligned}
$$

两边同除以 $\sin^2\alpha\cdot S_{\triangle ABC}$ 即证.

1. $\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

证明：

$$
\begin{aligned}
&\cot A+\cot B+\cot C\\
=&\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}\\
=&\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca\sin B}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab\sin C}\\
=&\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}+\frac{c^2+a^2-b^2}{4S}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}\\
=&\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\\
=&\frac{c^2+x^2-y^2}{2cx\sin\alpha}=\frac{a^2+y^2-z^2}{2ay\sin\alpha}=\frac{b^2+z^2-x^2}{2bz\sin\alpha}\\
=&\frac{(c^2+x^2-y^2)+(a^2+y^2-z^2)+(b^2+z^2-x^2)}{2cx\sin\alpha+2ay\sin\alpha 2bz\sin\alpha}\\
=&\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}
\end{aligned}
$$

证毕.

下面我们来看两道早期的 IMO 题.

首先是 1961 年第三届 IMO 的第一天第 2 题，此题也是著名的外森比克不等式：

> 设 a、b、c 为三角形的三边，其面积为 S. 求证：$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$，并说明何时取等号.

证明：

由海伦公式：

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

其中 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ 知：

$$16S^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

故只需证：

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2)^2\\
&\geq 3(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\\
\Longleftrightarrow\ &a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2\\
&\geq 3(-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2)\\
\Longleftrightarrow\ &4(a^4+b^4+c^4)\geq 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\
\Longleftrightarrow\ &2((a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\geq 0
\end{aligned}$$

不等式显然成立．等号成立当且仅当 $a=b=c$，即 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

注意到在布洛卡角的性质二中，我们有 $\cot\alpha=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

于是此不等式等价于 $\cot\alpha\geq\sqrt{3}$，即布洛卡角 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$.

下面我们再看 1991 年第三十二届 IMO 第二天第 2 题.

> 在 $\triangle ABC$ 中，P 内部一点．证明：在 $\angle PAB$，$\angle PBC$ 和 $\angle PCA$ 中至少有一个角不超过 30°.

再看这题，立马能反应过来和布洛卡角有关.

证明：

作出 $\triangle ABC$ 的布洛卡点 Q，并设 $\angle QAB=\angle QBC=\angle QCA=\alpha$.

由上知：$\alpha\leq 30^\circ$.

现在将 P 放入 $\triangle ABC$ 中，则 P 必在 $angleQAB$、$\angle QBC$、$\angle QCA$ 之一的内部（包含边界）.

不妨设 P 在 $\angle QAB$ 内部，则 $\angle PAB\leq\angle QAB=\alpha\leq 30^\circ$，证毕.

用上面的结论，此题轻松地得到了解决.

两道相隔近 30 年的 IMO 试题，通过布洛卡角竟产生了如此美妙的关联.