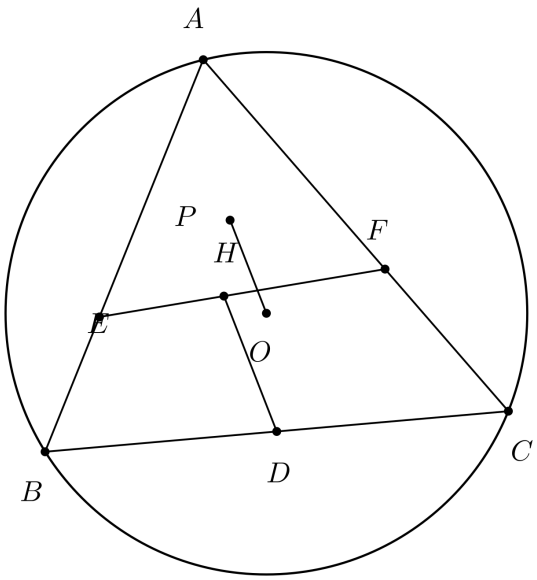
用张角定理证明一道几何题

2024-09-30 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_566a6fb9870a2e9f

国庆假期前讲的最后一题，祝大家假期快乐！

如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 的中点，O 为外心，H 为垂心，E、F 分别为 AB、AC 上一点，使得 $AE=AF$，且 F、H、E 三点共线，P 为 $\triangle AEF$ 外心．求证：$OP \parallel HD$.



分析与证明：

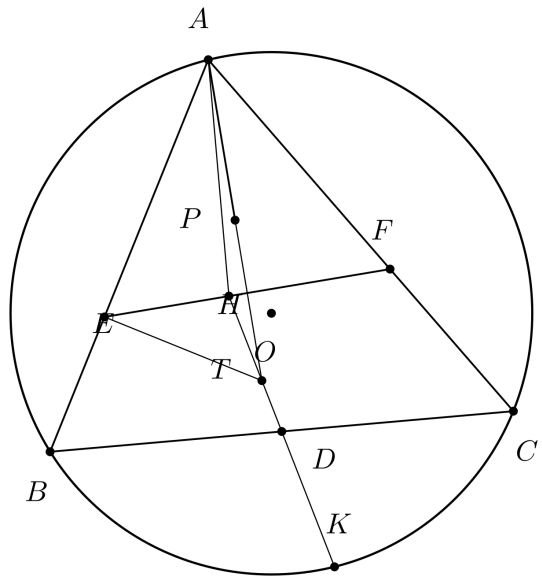
看到垂心、外接圆、中点一系列条件，不难想到这一熟知结论：垂心 H 关于 BC 中点 D 的对称点在 $\odot O$ 上，且为点 A 的对径点.

延长 HD 交 $\odot O$ 于点 K，熟知 O 为 AK 中点，要证 $PO \parallel HD$，只需证明 PO 为中位线.

延长 AP 交 HD 于点 T，即证 P 为 AT 中点.

结合 P 为 $\triangle AEF$ 的外心，只需证明点 T 也在 $\odot P$ 上，即证：$AE \perp ET$.

隐藏无关点后，得到下图：



设 $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 A,B,C，外接圆半径为 R.

于是 $AH=2R\cos A$，$AK=2R$，$\angle BAH=90^\circ-B$，$\angle CAH=90^\circ-C$，$\angle HAT=\angle TAK=\frac{\angle HAK}{2}=\frac{B-C}{2}$.

以 A 为视点，对 EHF 使用张角定理，得:

$$\begin{aligned}&\frac{\sin A}{AH}=\frac{\sin(90^\circ-C)}{AE}+\frac{\sin(90^\circ-B)}{AF}\\ \Rightarrow&\frac{\sin A}{2R\cos A}=\frac{\cos B+\cos C}{AE}\\ \Rightarrow&AE=\frac{\cos B+\cos C}{\sin A}\cdot 2R\cos A\end{aligned}$$

以 A 为视点，对 HTK 使用张角定理，得:

$$\begin{aligned}&\frac{\sin(B-C)}{AT}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{AH}+\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{AK}\\ \Rightarrow&\frac{2\cos\frac{B-C}{2}}{AT}=\frac{1}{2R\cos A}+\frac{1}{2R}=\frac{1+\cos A}{2R\cos A}\\ \Rightarrow&AT=\frac{2\cos\frac{B-C}{2}}{1+\cos A}\cdot 2R\cos A\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{AE}{AT}=&\frac{\cos B+\cos C}{\sin A}\cdot\frac{1+\cos A}{2\cos\frac{B-C}{2}}\\ =&\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cdot\frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\\ =&\cos\frac{A}{2}=\cos\angle EAT\end{aligned}$$

于是 $AE \perp ET$，证毕.