一个复数恒等式问题

2024-05-30　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_56c3f8849d45f03d

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读；下方附本站人工转写的文字版，只作阅读与检索之用，若与原图有出入，以公众号原文为准。

1. 互不相同的复数 a,b,c,d,e,f 满足条件：$ad+be+cf=af+bc+de=ab+cd+ef$. 求证：$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=ac+ce+ea+bd+df+fb$.

证明 设 a,b,c,d,e,f 在复平面上所对应的点分别为 A,B,C,D,E,F.

$$ad+be+cf=af+bc+de \iff \frac{a-e}{c-e}=\frac{b-f}{d-f} \iff \triangle ACE\sim\triangle BDF$$

$$ab+cd+ef=af+bc+de \iff \frac{a-c}{e-c}=\frac{d-f}{b-f} \iff \triangle ACE\sim\triangle DFB$$

于是 $\triangle BDF\sim\triangle DFB$，这说明 $\triangle BDF$ 为正三角形，即

$$b^2+d^2+f^2=bd+df+fb$$

同理 $a^2+c^2+e^2=ac+ce+ea$，两式相加即证.

本站人工转写（文字版）

下面这段文字由本站对照上方图片逐条录入，公式写成可读的记号，只为方便检索与读屏；它不是公众号原文的一部分，如与图片或原文有出入，请以原文为准。

1. 第 1 题　互不相同的复数 a,b,c,d,e,f 满足条件：$ad+be+cf=af+bc+de=ab+cd+ef$. 求证：$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=ac+ce+ea+bd+df+fb$.
2. 证明　设 a,b,c,d,e,f 在复平面上所对应的点分别为 A,B,C,D,E,F. 先说明所涉三角形非退化：设 $t=\frac{a-e}{c-e}=\frac{b-f}{d-f}$，由题设的另一个等式有 $1-t=\frac1t$，故 $t^2-t+1=0$，t 非实数.
3. $ad+be+cf=af+bc+de\Longleftrightarrow \frac{a-e}{c-e}=\frac{b-f}{d-f}\Longleftrightarrow\triangle ACE\sim\triangle BDF$.
4. $ab+cd+ef=af+bc+de\Longleftrightarrow \frac{a-c}{e-c}=\frac{d-f}{b-f}\Longleftrightarrow\triangle ACE\sim\triangle DFB$.
5. 于是 $\triangle BDF\sim\triangle DFB$，这说明 $\triangle BDF$ 为正三角形，即 $b^2+d^2+f^2=bd+df+fb$.
6. 同理 $a^2+c^2+e^2=ac+ce+ea$，两式相加即证.