2022 年意大利数学奥林匹克

2022-05-08　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_56f54dbc67db337d

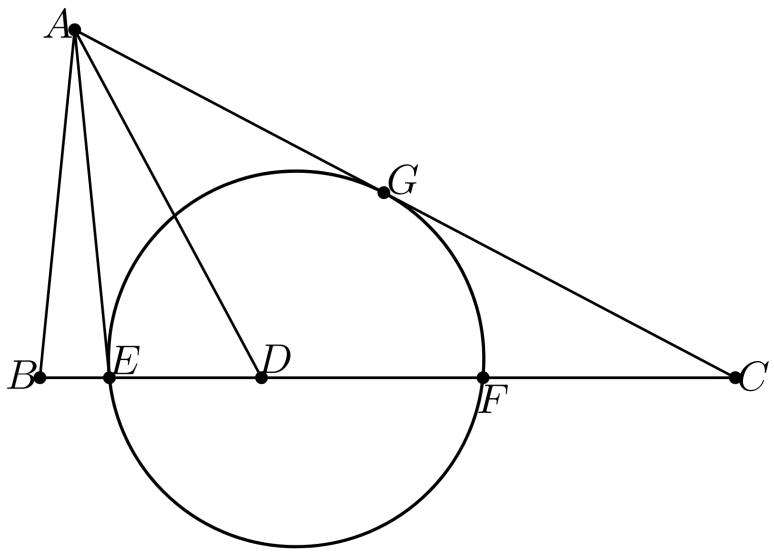
1. 对于怎样的正整数 n，存在正整数 A 满足以下条件：

- A 能被 2022 整除；
- A 的十进制形式只由数码 0 和 7 组成；
- A 的十进制形式中恰有 n 个 7.

1. 锐角 $\triangle ABC$ 满足 $AB < AC$.

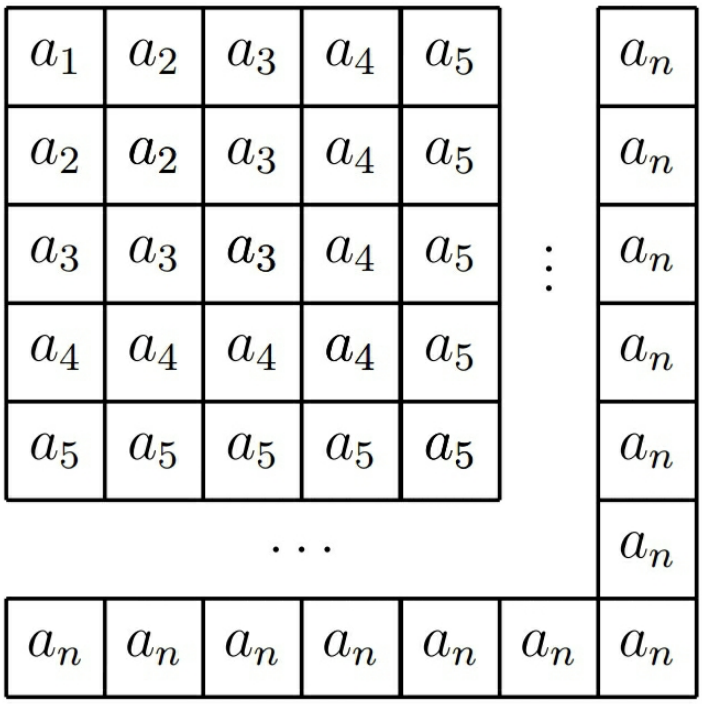
- D 为 $\angle A$ 的角平分线和 BC 的交点.
- E 为线段 BC 上异于 B 的一点，且满足 $AB = AE$.
- F 为线段 BC 上异于 B 的一点，且满足 $BD = DF$.
- G 为线段 AC 上的一点，且满足 $AB = AG$.

求证：$\triangle EFG$ 的外接圆和 AC 相切.



1. 一场数学竞赛有 $n = 10000$ 位选手参赛. 在最后的晚会上，按照顺序，第一位选手取走全部蛋糕的 $\frac{1}{n}$，第二位选手取走剩余蛋糕的 $\frac{2}{n}$，第三位选手取走剩余蛋糕的 $\frac{3}{n}$，如此进行到最后一个人，其取走剩余的所有蛋糕.
   问：哪位选手取走了最多的蛋糕?

2. Alberto 选取 2022 个整数 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2022}（不必为正，也不必互异），并将它们放置在一个 2022×2022 的表格中，满足在单元格 (i, j) 中放入 a_k，其中 $k = \max\{i, j\}$. 如下图所示（为可读性更强，用 a_n 代替 a_{2022}）.



Barbara 不知道 Alberto 选取了哪些整数，但知道 Alberto 的放置方式. 给定正整数 k，$1 \le k \le 2022$，Barbara 想求出 a_k 的值（她对求出其余的 a_i（$i \ne k$）的值并不感兴趣）. 为此，Barbara 可以问 Alberto 一个或多个问题. 在每个问题中，她可以问某个 “路径” 的单元格中的所有数字之和. 其中 “路径” 为满足如下定义的单元格列表：

- 路径从左上角的单元格开始，到右下角的单元格结束；
- 路径中的单元格均不同；
- 路径中的两个连续单元格有公共边.

在 k 变化时，求 Barbara 求出 a_k 所需要的最少次数.

1. 机器人 “Mag-o-matic“将 101 个玻璃杯排成一排，按位置从 1 到 101 进行编号. 在每个玻璃杯中，有一个球或者没有球. Mag-o-matic 只接受 $(a; b, c)$ 形式的基本指令，该指令的含义为：考虑 a 位置的玻璃杯，如果其中有一个球，则交换 b 位置和 c 位置的两个玻璃杯（连同它们所包含的球）.
（这意味着 a，b，c 为 1 到 101 之间的数字，b 和 c 不同，但可以和 a 相同）.
“程序” 为一个有限的基本指令序列，在开始时将玻璃杯和小球放置完毕，然后 Mag-o-matic 逐一执行.
称子集 $S \subseteq \{0, 1, \cdots, 101\}$“可辨别的”，如果存在一个程序，对任意初始情形，执行该程序

后到达最终情形中，位置 1 的玻璃杯中有一个球当且仅当包含球的玻璃杯数量为 S 中的一个元素.

(a) 求证：若子集 S 有奇数个元素，则其是” 可辨别的 “；

(b) 求所有 “可辨别的” 子集 S.

2. 设不等边三角形 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，内心为 I，内切圆和边 CA 切于点 D，和边 CB 切于点 E. A_1 为直线 EI 上一点，满足 $A_1I = R$，且 I 在 A_1 和 E 之间. B_1 为直线 DI 上一点，满足 $B_1I = R$，且 I 在 B_1 和 D 之间. AA_1 和 BB_1 交于点 P.

(a) 求证：P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

(b) 已知 $AB = 1$，且 P 和 C 重合. 求 $\triangle ABC$ 周长的可能值.

