2024 年日本初中数学奥林匹克（决赛）

2024-02-19　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_570e18e0acac2f65

2024 年日本初中数学奥林匹克（决赛）

程国根　译

1. 设正实数 a,b,c,d 满足 $\dfrac{ab}{cd}=\dfrac{a+b}{c+d}$. 求证:

$$(a+b)(c+d)\geq(a+c)(b+d).$$

2. 在 $\triangle ABC$ 中,$AB<AC$,M 为线段 BC 的中点, 点 N 是 $\triangle ABC$ 的外接圆弧 BC(含点 A) 的中点.$\angle BAC$ 的角平分线和 BC 交于点 D. 设点 M 关于直线 ND 的对称点为点 M'. 若点 M' 在 $\triangle ABC$ 的内部, 且 $AM'\perp BC$, 求 $\angle BAC$ 的大小.

3. 求所有的正整数组 (n,x,y,z,p), 其中 p 为素数, 满足

$$(x^2+4y^2)(y^2+4z^2)(z^2+4x^2)=p^n.$$

4. 2024×2024 方格网中的每个小方格都被染上红、蓝、白三色之一。在每个红色小方格内放置一枚红色棋子, 在每个蓝色小方格内放置一枚蓝色棋子。此外，对于白色小方格，若它与至少一个蓝色小方格有公共边或公共顶点，则在其中放置一枚蓝色棋子。假设对于任意的 2×2 方格，其中的红色棋子和蓝色棋子个数相同，且均为一个或两个。求白色小方格个数的最大可能值。

5. 设 D 为 $\triangle ABC$ 的外接圆弧 BC（不含点 A）上一点，且满足 $AB:AC=DB:DC$. 设点 B' 为 B 关于 AC 的对称点，点 C' 为 C 关于 AB 的对称点，点 D' 为 D 关于 BC 的对称点. 求证：$\triangle BCD$ 与 $\triangle B'C'D'$ 相似.

2024 年日本初中数学奥林匹克（决赛）

程国根　译

1. 设正实数 a,b,c,d满足 $\frac{ab}{cd}=\frac{a+b}{c+d}$. 求证:$$(a+b)(c+d)\ge(a+c)(b+d).$$

2. 在 $\triangle ABC$中,$AB<AC$,M为线段 BC的中点, 点 N是 $\triangle ABC$的外接圆弧 BC(含点 A) 的中点.$\angle BAC$的角平分线和 BC交于点 D. 设点 M关于直线 ND的对称点为点 M'. 若点 M'在 $\triangle ABC$的内部, 且 $AM'\perp BC$, 求 $\angle BAC$的大小.

3. 求所有的正整数组 (n,x,y,z,p)，其中 p为素数，满足 $$(x^2+4y^2)(y^2+4z^2)(z^2+4x^2)=p^n.$$

4. 2024×2024方格网中的每个小方格都被染上红、蓝、白三色之一。在每个红色小方格内放置一枚红色棋子，在每个蓝色小方格内放置一枚蓝色棋子。此外，对于白色小方格，若它与至少一个蓝色小方格有公共边或公共顶点，则在其中放置一枚蓝色棋子。假设对于任意的 2×2方格，其中的红色棋子和蓝色棋子个数相同，且均为一个或两个。求白色小方格个数的最大可能值。

5. 设 D为 $\triangle ABC$的外接圆弧 BC（不含点 A）上一点，且满足 $AB:AC=DB:DC$. 设点 B'为 B关于 AC的对称点，点 C'为 C关于 AB的对称点，点 D'为 D关于 BC的对称点. 求证：$\triangle BCD$与 $\triangle B'C'D'$相似.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024 年日本初中数学奥林匹克（决赛）}
\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}
\ex 设正实数$a,b,c,d$满足$\frac{ab}{cd}=\frac{a+b}{c+d}$. 求证:$$(a+b)(c+d)\ge(a+c)(b+d).$$\vfill\ex 在$\triangle
↪ ABC$中,$AB<AC$,$M$为线段$BC$的中点,点$N$是$\triangle ABC$的外接圆弧$BC$(含点$A$)的中点.$\angle
↪ BAC$的角平分线和$BC$交于点$D$.设点$M$关于直线$ND$的对称点为点$M'$.若点$M'$在$\triangle
↪ ABC$的内部,且$AM'\perp BC$,求$\angle BAC$的大小.\vfill\ex
↪ 求所有的正整数组$(n,x,y,z,p)$,其中$p$为素数,满足$$(x^2+4y^2)(y^2+4z^2)(z^2+4x^2)=p^n.$$\vfill\ex $2024\times
↪ 2024$方格网中的每个小方格都被染上红、蓝、白三色之一。
↪ 在每个红色小方格内放置一枚红色棋子,在每个蓝色小方格内放置一枚蓝色棋子。此外，对于白色小方格，
↪ 若它与至少一个蓝色小方格有公共边或公共顶点，则在其中放置一枚蓝色棋子。假设对于任意的$2\times 2$方格，
↪ 其中的红色棋子和蓝色棋子个数相同，且均为一个或两个。求白色小方格个数的最大可能值。\vfill\ex 设$D$为$\triangle
↪ ABC$的外接圆弧$BC$（不含点$A$）上一点，且满足$AB:AC=DB:DC$.设点$B'$为$B$关于$AC$的对称点，
↪ 点$C'$为$C$关于$AB$的对称点，点$D'$为$D$关于$BC$的对称点.求证：$\triangle BCD$与$\triangle B'C'D'$相似.\vfill
```