2024 年北马其顿数学奥林匹克

2024-04-09　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_579d6c1fbcc2eaa9

2024 年北马其顿数学奥林匹克

程国根　译

1. 设 M 为正实数. 求最小的正实数 k，使得对任意整数 $n > M$，区间 $(n, kn]$ 内都至少有一个 2 的整数次幂.

2. 在四边形 $ABCD$ 中，$AB > AD$. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆 k_1 的圆心为 O_1，$\triangle ADC$ 的内切圆 k_2 的圆心为 O_2，两内切圆在 AC 上有公共切点. 设 k_1 和 AB 切于点 M，k_2 和 AD 切于点 L. 求证：BD, LM, O_1O_2 三线共点.

3. 求所有函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对任意实数 x, y，都有

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy.$$

4. 两个盒子中分别有 1994 和 2024 颗弹珠. Spiro 和 Cvetko 进行以下游戏：从 Spiro 开始，两人轮流从其中一个盒子中取出一些弹珠，使该回合取出的弹珠数是另一个盒子中当前弹珠数的约数. 若在某人的回合结束时，两个盒子都是空的，则其获胜. 谁有必胜策略?

5. 设函数 $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$ 满足如下条件：

(1) 对任意 $a \in \mathbb{N}_+$，都有 $f(a + f(a)) \le 2a + 3$；

(2) 对任意 $a, b \in \mathbb{N}_+$，都有 $f(f(a) + b) = f(a + f(b))$.

对任意 $a \in \mathbb{N}_+$，定义 $g(a)$ 为 $f(a)$ 的最大素因子. 求证：存在整数 $a > b > 2024$，使得 $b \mid a$，且 $g(a) = g(b)$.

2024 年北马其顿数学奥林匹克

程国根　译

1. 设 M为正实数. 求最小的正实数 k，使得对任意整数 $n>M$，区间 $(n,kn]$内都至少有一个 2的整数次幂.

2. 在四边形 $ABCD$中，$AB>AD$. 设 $\triangle ABC$的内切圆 k_{1}的圆心为 O_{1}，$\triangle ADC$的内切圆 k_{2}的圆心为 O_{2}，两内切圆在 AC上有公共切点. 设 k_{1}和 AB切于点 M，k_{2}和 AD切于点 L. 求证：$BD,LM,O_{1}O_{2}$三线共点.

3. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意实数 x,y，都有 $$f(f(x+y))=f(x+y)+f(x)f(y)-xy.$$

4. 两个盒子中分别有 1994和 2024颗弹珠．Spiro 和 Cvetko 进行以下游戏：从 Spiro 开始，两人轮流从其中一个盒子中取出一些弹珠，使该回合取出的弹珠数是另一个盒子中当前弹珠数的约数．若在某人的回合结束时，两个盒子都是空的，则其获胜．谁有必胜策略？

5. 设函数 $f:\mathbb{N}_{+}\to\mathbb{N}_{+}\setminus\{1\}$满足如下条件：

1. 对任意 $a\in\mathbb{N}_{+}$，都有 $f(a+f(a))\le 2a+3$；
2. 对任意 $a,b\in\mathbb{N}_{+}$，都有 $f(f(a)+b)=f(a+f(b))$.

对任意 $a\in\mathbb{N}_{+}$，定义 $g(a)$为 $f(a)$的最大素因子．求证：存在整数 $a>b>2024$，使得 $b\mid a$，且 $g(a)=g(b)$.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年北马其顿数学奥林匹克}\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}\ex 设$M$为正实数．求最小的正实数$k$，使得对任意整数$n>M$，区间$(n,kn]$内都至少有一个$2$的整数次幂．\vfill\ex 在四边形$ABCD$中，$AB>AD$．设$\triangle ABC$的内切圆$k_{1}$的圆心为$O_{1}$，$\triangle ADC$的内切圆$k_{2}$的圆心为$O_{2}$，两内切圆在$AC$上有公共切点．设$k_{1}$和$AB$切于点$M$，$k_{2}$和$AD$切于点$L$．求证：$BD,LM,O_{1}O_{2}$三线共点．\vfill\ex 求所有函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意实数$x,y$，都有$$f(f(x+y))=f(x+y)+f(x)f(y)-xy.$$\vfill\ex 两个盒子中分别有$1994$和$2024$颗弹珠．Spiro和Cvetko进行以下游戏：从Spiro开始，两人轮流从其中一个盒子中取出一些弹珠，使该回合取出的弹珠数是另一个盒子中当前弹珠数的约数．若在某人的回合结束时，两个盒子都是空的，则其获胜．谁有必胜策略？\vfill\ex 设函数$f:\mathbb{N}_{+}\to\mathbb{N}_{+}\setminus\{1\}$满足如下条件：\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 对任意$a\in\mathbb{N}_{+}$，都有$f(a+f(a))\le 2a+3$；\item 对任意$a,b\in\mathbb{N}_{+}$，都有$f(f(a)+b)=f(a+f(b))$.\end{enumerate}对任意$a\in\mathbb{N}_{+}$，定义$g(a)$为$f(a)$的最大素因子．求证：存在整数$a>b>2024$，使得$b\mid a$，且$g(a)=g(b)$．\vfill
```