以恩的“作弊”石子局：背后竟是今年女奥的策略问题

2025-09-17　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_58458cabfc833987

今天以恩生病在家，我难得地和她一起玩了很多游戏。

其中一个是经典的“取石子”游戏，我们用以恩的解压玩具进行，规则如下：

一共有 36 个按钮，每人每次可以按下 1 个或 2 个按钮，按下最后一个按钮的人失败。

这是一个先手必胜的游戏，只需依次留下 34、31、28、…、1 个按钮即可。

第一轮由以恩先手，她获胜了；第二轮由我先手，在剩最后 4 个按钮时，以恩狡黠一笑，说：“我是小孩，有一次作弊机会。”说着，一次按下了 3 个按钮。

于是我们又玩起了每人各有一次“作弊机会”（也可以不使用）的新规则（开始她不同意，后来发现如果只有她有作弊机会的话，不管先后手，都是她必胜的）。

在新规则下的必胜策略也很简单，大家不妨自己尝试一下。

接下来我们又玩了“按下最后一个按钮的人获胜”的规则，以及相应的作弊模式。

见多识广的读者们可能已经看出来了，这就是今年 CGMO 第二天第 3 题的背景，题目如下：

2025(24 届) 女子数学奥林匹克第 7 题

甲乙两人玩如下的游戏，初始时桌上共有 N 枚石子. 两人轮流操作，由甲先进行. 轮到某人操作时，她可以选择执行下面两个操作之一：

（操作 1）从桌上取走 1 枚、或 2 枚、或 3 枚石子；

（操作 2）从桌上取走 4 枚石子.

要求每人选择（操作 2）的次数均不超过 5. 取走最后一枚石子的人获胜.

问：有多少个正整数 $N \leq 2025$，使得甲有获胜策略?

我把这道题读给了以恩，她勉强理解了题目，但令她更感兴趣的是这个比赛的名字：女子数学奥林匹克。于是我们有了下面的对话：

-“为什么叫女子数学奥林匹克？还有男子的吗？”

-“没有男子的，只有女子或者男女都能参加的比赛。这是为了给对数学感兴趣的女孩子更多的机会。”

-“可是我的数学比我周围的男生都好。”

-“那你以后想参加这个比赛吗？”

-“不想，我只想参加不分男女的比赛。”

完全符合她性格的回答…但听到后内心还是不禁感慨。

希望对数学的热爱和自信能够一直伴随着你。