2021 年中国女子数学奥林匹克（第一天）

2021-08-12　原文链接

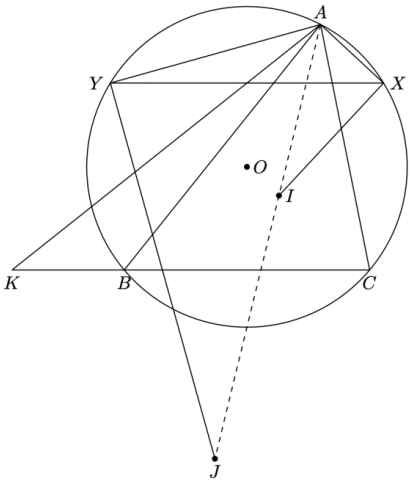
网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5862eba853ef6c56

1. $n \in \mathbb{N}^+$，x_1，x_2，$\cdots$，x_{n+1}，p，$q \in \mathbb{R}^+$，其中 $p<q$，满足 $x_{n+1}^p > \sum_{i=1}^{n} x_i^p$，求证：

   (1)$x_{n+1}^q > \sum_{i=1}^{n} x_i^q$；

   (2)$\left(x_{n+1}^p - \sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} < \left(x_{n+1}^q - \sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

2. $\triangle ABC$ 内接于圆 O，I、J 分别是 $\triangle ABC$ 的内心和 $\angle BAC$ 所对的旁心，点 X、Y 在圆 O 上，满足 $\angle AXI = \angle AYJ = 90^\circ$，线段 IJ 的中垂线交直线 BC 于点 K．求证：AK 平分 XY．



恩次方根

3. 求最小的 n，对 $n \times n$ 的方格表，红黄蓝三染色，满足：(1) 每种颜色的方格数目相同；(2) 若某行有红格，则该行必有蓝格，且无黄格；(3) 若某行有蓝格，则该行必有红格，且无黄格．

   （注：本题似乎有误，(3) 中的行应为列，大家可以等待官方版）

4. 称 $\{a_n\}$ 为 **CGMO 数列**，若 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 为严格递增的正整数数列．对 $\forall n \geq 2020$，a_n 满足存在 $A_n \subset \{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}$，且 $a_n \prod_{a \in A_n} a$ 为完全平方数．求证：存在常数 C_1，C_2，对任意 **CGMO 数列**，存在 $N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时，有 $C_1 n^2 \leq a_n \leq C_2 n^2$.

```
\usepackage{tikz}
\usepackage{tkz-euclide}
\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{0/0/B,5/0/C,4/5/A}
\tkzDefTriangleCenter[circum](A,B,C) \tkzGetPoint{O} % 定义三角形 ABC 外心为 O
\tkzInCenter(A,B,C)\tkzGetPoint{I}% 定义三角形 ABC 内心为 I
\tkzDefTriangleCenter[ex](B,A,C)\tkzGetPoint{J}% 定义三角形 ABC 中 A 所对的旁心为 J
\tkzDefCircle[diameter](A,I)\tkzGetPoint{A_{1}}% 定义 AI 为直径的圆的圆心为 A_{1}
\tkzDefCircle[diameter](A,J)\tkzGetPoint{A_{2}}% 定义 AJ 为直径的圆的圆心为 A_{2}
```

```
\tkzDefLine[mediator](I,J) \tkzGetPoints{I_{1}}{J_{1}}% 定义 IJ 中垂线且在其上定义两点 I_{1}，J_{1}（对称取点）
\tkzInterLL(I_{1},J_{1})(B,C) \tkzGetPoint{K}% 定义直线 I_{1}J_{1}，BC 交点为 K
\tkzInterCC(O,A)(A_{1},A)\tkzGetPoints{A}{X}% 定义圆 O 与圆 O_{1} 交点为 A，X
\tkzInterCC(O,A)(A_{2},A)\tkzGetPoints{A}{Y}% 定义圆 O 与圆 O_{2} 交点为 A，Y
\tkzDrawSegments(A,B A,K A,C K,C A,X A,Y X,Y X,I Y,J)
\tkzDrawSegments[dashed](A,J)
\tkzDrawCircle(O,A)
\tkzDrawPoints(O,I,J)
\tkzLabelPoints[below](B,C,K,J)
\tkzLabelPoints[above](A)
\tkzLabelPoints[left](Y)
\tkzLabelPoints[right](X,I,O)
\end{tikzpicture}
```