2025 年越南数学奥林匹克

2024-12-27 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_59ba4f1350a25655

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2025 年越南数学奥林匹克

程国根 译

第一天

1. 设 $P(x)=x^4-x^3+x$.

(1) 求证：对任意正实数 a，多项式 $P(x)-a$ 有唯一正根.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=\dfrac{1}{3}$，且对任意 $n\geq 1$，a_{n+1} 为 $P(x)-a_n$ 的唯一正根. 求证：数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求出 $\{a_n\}$ 的极限.

2. 对任意 $n\in\mathbb{N}$，记 $u_n=\left(2+\sqrt{5}\right)^n+\left(2-\sqrt{5}\right)^n$.

(1) 求证：对任意 $n\in\mathbb{N}$，u_n 均为正整数. 当 n 变化时，求 u_n 除以 24 的最大余数.

(2) 求所有正整数对 (a,b)，满足 $a,b<500$，且对任意奇数 n，都有 $u_n\equiv a^n-b^n \pmod{1111}$.

3. 不等边的锐角 $\triangle ABC$ 的外心为 O，垂心为 H. AH 再次交 $\odot(ABC)$ 于点 D. 设 AB,AC 的中点分别为 F,E. 过点 H 作 HF 的垂线交 BC 于点 K，DK 再次交 $\odot(ABC)$ 于点 Y.

(1) 求证：BK 的中垂线与 BY 的交点在 $\odot(YFO)$ 上.

(2) 过 H 作 HE 的垂线交 BC 于点 L，LD 再次交 $\odot(ABC)$ 于点 Z. ZB 交 OE 于点 M，CY 交 OF 于点 T，CZ 交 YB 于点 P. 过 T 作 AO 的垂线 d，求证：d 平分 AP.

1

第二天

4. 在不等边的锐角 $\triangle ABC$ 中，AD, BE, CF 为三条高，点 H, O, I 分别为垂心、外心、内心，点 M, N, P 分别为三边 BC, CA, AB 的中点，$X = AI \cap NP$，$Y = BI \cap PM$，$Z = CI \cap MN$.

(1) 求证：$\odot(AXD), \odot(BYE), \odot(CZF)$ 共根轴 OH.

(2) 直线 XP, YM, ZN 分别与 $\odot(AXD) \odot (BYE) \odot (CZF)$ 再次相交于点 X', Y', Z'. 设 J 是 I 关于 O 的对称点. 求证：X', Y', Z' 在一条垂直于 HJ 的直线上.

5. 考虑一个 $3k \times 3k$ 的正方形网格（其中 k 为正整数），网格中的单元格通过列和行来定位：单元格 (i, j) 是从左到右数第 i 列，从下往上数第 j 行。在网格的单元格中放置 $4k$ 颗弹珠，每个单元格最多放置一颗弹珠，使得：

- 每行和每列至少有一颗弹珠。
- 对于每颗弹珠，在同一行或同一列上有另一颗弹珠。

(1) 假设 $k = 1$. 求满足题意的放置方法数（如果存在一个单元格 (i, j) 在一种放置方法中有弹珠，而在另一种放置方法中没有弹珠，那么这两种放置方法是不同的）。

(2) 假设 $k \geq 1$. 求最大的正整数 N，使得在任意标记网格上的 N 个单元格后，总存在一种满足题意的放置方法，且弹珠不会放置在任何被标记的单元格上。

6. 非负实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 3$. 求证：

$$\sqrt{3a^3 + 4bc + b + c} + \sqrt{3b^3 + 4ca + c + a} + \sqrt{3c^3 + 4ab + a + b} \geqslant 9.$$

2

（越南的几何好难……和其它题目不是一个难度级别的）