2026 年北京大学强基计划数学试题及简解

2026-06-30　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_59de78bb71d94b73

本文为图片版：正文为 10 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

昨天发的回忆版有比较多的错误，感谢各位的指出。参考了网上其它版本的题目之后重发一遍，同时发一个简解（制作仓促，仅供参考）。

2026 年北京大学强基计划数学试题与简解

1　题目

1. 已知圆内接四边形 $ABCD$ 满足 $AB=BC=CD=1$，$\angle B=120^\circ$，求 AD 的长.

2. 若复数 z 满足 $|z|=|z-(2+2\mathrm{i})|=3$，求满足题意的所有复数 z 的乘积.

3. 求同余方程 $x^2\equiv 1 \pmod{30^{2026}}$ 的解的个数.

4. 已知实数 x,y,z 满足 $xy+yz+zx=-4$，求 $|x|+|y|+|z|$ 的最小值.

5. 求单位圆上正 2026 边形的一个顶点到另外 2025 个顶点的距离的乘积.

6. 若实数 x,y 满足 $x+y=\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}$，求 $x+y$ 的最大值.

7. 在三角形 ABC 中，已知 $\dfrac{\sin A+\sqrt{3}\cos A}{\cos A-\sqrt{3}\sin A}=\tan\dfrac{7\pi}{12}$，求 $\sin 2B+2\cos C$ 的取值范围.

8. 若定义在实数域上的函数 $f(x)$ 的图像绕原点旋转 90° 后不变，求其不动点的个数.

9. 实数 x,y 满足 $x^2+y^2+xy=1$，求 $x-y$ 的最大值.

10. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，点 $P(a,0)$ 满足 $a>0$. 过点 P 作椭圆的两条切线相互垂直，求 a 的值.

11. 已知实数 a,b,c 的绝对值均不小于 1，且 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$．若 $f(a)+f(b)+f(c)=0$，求 $a+b+c$ 的最小值．

12. 设正四面体的棱长为 1，求其对棱中点的距离．

13. 已知正实数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，当 $n\geq 2$ 时，$a_n+\dfrac{2}{a_n}=2S_n$，其中 S_n 为前 n 项和，求 a_{2026} 的整数部分．

14. 已知复数 z 满足 $z^5=\bar{z}$，求满足该方程的复数 z 的个数．

15. 已知集合 $M=\{1,2,\cdots,2026\}$，在 M 中选取四个数，求可以组成公差不为 0 且长度为 4 的等差数列的个数．

16. 已知 p,q,r 为质数，且 $p^4+q^4+r^4-3$ 为质数，求所有满足条件的质数数组 (p,q,r)．

17. 已知 p,q 为非负实数，函数 $f(x)=x^2+px+q$ 存在零点．若正整数 a,b 满足 $f(a)<f(b)\leq 1.001f(a)$，求 $f(b)-f(a)$ 的最小值的整数部分．

18. 已知方程 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0(a,b\in\mathbb{R})$ 的四个根均为正实数，不要求互异，求 b 的取值范围．

19. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$F$ 为椭圆右焦点，P 为椭圆上动点，求 $|OP|+|PF|$ 的最大值．

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=0,a_1=1$．对任意整数 $n\geq 2$，都存在 $k(1\leq k\leq n)$，使得 a_n 为 $a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_{n-k}$ 这 k 项的算术平均数，求 $a_{2026}-a_{2025}$ 的最小值．

2 简解

1. 已知圆内接四边形 $ABCD$ 满足 $AB=BC=CD=1$, $\angle B=120^\circ$，求 AD 的长.

解 等弦对等弧，设三段小弧 AB, BC, CD 的圆心角均为 θ. 由圆周角定理，$\angle B=120^\circ$ 所对的弧 ADC 为 240°，于是另一段弧 AC 为 120°，即 $2\theta=120^\circ$. 故 $\theta=60^\circ$，边长 1 等于半径，且弧 AD 为 180°，所以 AD 为直径，长为 2.

答案：2.

2. 若复数 z 满足 $|z|=|z-(2+2\mathrm{i})|=3$，求满足题意的所有复数 z 的乘积.

解 设 $z=x+y\mathrm{i}$. 两圆方程相减得 $x+y=2$，并有 $x^2+y^2=9$. 两解关于 $y=x$ 对称，记为 $a+b\mathrm{i}$ 与 $b+a\mathrm{i}$. 由 $a+b=2, a^2+b^2=9$，乘积为 $(a+b\mathrm{i})(b+a\mathrm{i})=9\mathrm{i}$.

答案：$9\mathrm{i}$.

3. 求同余方程 $x^2\equiv 1 \pmod{30^{2026}}$ 的解的个数.

解 分解模数为 $30^{2026}=2^{2026}3^{2026}5^{2026}$. 模 $2^n (n\geq 3)$ 时有 4 个解，模奇素数幂时仅有 ± 1 两解. 由中国剩余定理，总数为 $4\cdot 2\cdot 2=16$.

答案：16.

4. 已知实数 x,y,z 满足 $xy+yz+zx=-4$，求 $|x|+|y|+|z|$ 的最小值.

解 记 $X=|x|,Y=|y|,Z=|z|$，则 $XY+YZ+ZX\geq 4$. 又 $(X+Y+Z)^2\geq 4(XY+YZ+ZX)$，所以 $|x|+|y|+|z|\geq 4$. 取 $(x,y,z)=(2,-2,0)$ 即达等号.

答案：4.

5. 求单位圆上正 2026 边形的一个顶点到另外 2025 个顶点的距离的乘积.

解 取该顶点为 1，其余顶点为 $\zeta^k(k=1,\cdots,2025)$，其中 $\zeta=e^{2\pi \mathrm{i}/2026}$. 由 $\dfrac{x^{2026}-1}{x-1}=\prod\limits_{k=1}^{2025}(x-\zeta^k)$，令 $x=1$，得距离乘积为 $|\prod\limits_{k=1}^{2025}(1-\zeta^k)|=2026$.

答案：2026.

6. 若实数 x,y 满足 $x+y=\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}$，求 $x+y$ 的最大值.

解 令 $S=x+y$. 由柯西不等式，$S\leq\sqrt{2(2S+2)}=2\sqrt{S+1}$，故 $S\leq 2+2\sqrt{2}$. 当 $x=y=1+\sqrt{2}$ 时原式成立，故上界可取.

答案：$2+2\sqrt{2}$.

7. 在三角形 ABC 中，已知 $\dfrac{\sin A+\sqrt{3}\cos A}{\cos A-\sqrt{3}\sin A}=\tan\dfrac{7\pi}{12}$，求 $\sin 2B+2\cos C$ 的取值范围.

解 左式为 $\tan(A+\dfrac{\pi}{3})$，结合 $0<A<\pi$ 得 $A=\dfrac{\pi}{4}$，故 $B+C=\dfrac{3\pi}{4}$. 令 $t=\sin B-\cos B$，则 $-1<t<\sqrt{2}$，且 $\sin 2B=1-t^2$，$2\cos C=\sqrt{2}t$. 于是原式为 $\dfrac{3}{2}-(t-\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2$，最大值为 $\dfrac{3}{2}$，下确界为 $-\sqrt{2}$ 且取不到.

答案：$\left(-\sqrt{2},\dfrac{3}{2}\right]$.

8. 若定义在实数域上的函数 $f(x)$ 的图像绕原点旋转 90° 后不变，求其不动点的个数.

解 图像旋转给出 $f(-f(x))=x$，故 f 为双射. 又点 $(0,f(0))$ 连续旋转两次仍在图像上，得 $f(0)=-f(0)$，所以 $f(0)=0$. 若 $f(x)=x$，旋转后有 $f(-x)=x=f(x)$，由单射性知 $x=0$，故仅一个不动点.

答案：1.

9. 实数 x,y 满足 $x^2+y^2+xy=1$，求 $x-y$ 的最大值.

解 设 $u=x-y,v=x+y$. 条件化为 $u^2+3v^2=4$，所以 $u=x-y\le 2$，且取 $v=0,u=2$ 即可达到.

答案：2.

5

10. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，点 $P(a,0)$ 满足 $a>0$．过点 P 作椭圆的两条切线相互垂直，求 a 的值．

解 设切点为 (x_0,y_0)．切线为 $\dfrac{xx_0}{4}+yy_0=1$，过 P 得 $x_0=\dfrac{4}{a}$，其斜率为 $-\dfrac{x_0}{4y_0}$．两条切线斜率互为相反数且垂直，故 $x_0^2=16y_0^2$．与 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$ 联立得 $x_0^2=\dfrac{16}{5}$，由 $a>0$ 得 $a=\sqrt{5}$．

答案：$\sqrt{5}$．

11. 已知实数 a,b,c 的绝对值均不小于 1，且 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$．若 $f(a)+f(b)+f(c)=0$，求 $a+b+c$ 的最小值．

解 当 $x\geq 1$ 时 $f(x)\geq 2$，当 $x\leq -1$ 时 $f(x)\leq -2$，所以最小和的情形应为一负二正．正数部分至少贡献 4，且 $b+c$ 最小在 $b=c=1$ 时取得．于是负数 a 满足 $a+\dfrac{1}{a}=-4$，取较小根 $a=-2-\sqrt{3}$，得和为 $-\sqrt{3}$．

答案：$-\sqrt{3}$．

12. 设正四面体的棱长为 1，求其对棱中点的距离．

解 取立方体中互不相邻的四个顶点，可得正四面体．若正四面体边长为 1，则立方体边长为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$．一组对棱中点的距离正等于该立方体边长．

答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

13. 已知正实数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，当 $n\geq 2$ 时，$a_n+\dfrac{2}{a_n}=2S_n$，其中 S_n 为前 n 项和，求 a_{2026} 的整数部分.

解 由 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 代入，可化为 $S_n=S_{n-1}+\dfrac{2}{S_{n-1}}$. 于是 $S_2=3$ 且 S_n 递增. 当 $n\geq 3$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{2}{S_{n-1}}\leq\dfrac{2}{3}<1$，故 a_{2026} 的整数部分为 0.

答案：0.

14. 已知复数 z 满足 $z^5=\overline{z}$，求满足该方程的复数 z 的个数.

解 $z=0$ 为一解. 若 $z=re^{\mathrm{i}\theta}\neq 0$，比较模长和辐角，得 $r=1$ 且 $e^{6\mathrm{i}\theta}=1$，非零解有 6 个，再加上零解共 7 个.

答案：7.

15. 已知集合 $M=\{1,2,\cdots,2026\}$，在 M 中选取四个数，求可以组成公差不为 0 且长度为 4 的等差数列的个数.

解 按有序等差数列计数. 正公差 d 满足 $1\leq d\leq 675$，首项有 $2026-3d$ 种，故正公差共有 $\displaystyle\sum_{d=1}^{675}(2026-3d)=683100$ 种. 负公差同数，总数为 1366200.

答案：1366200.

7

16. 已知 p,q,r 为质数，且 $p^4+q^4+r^4-3$ 为质数，求所有满足条件的质数数组 (p,q,r).

解 若 p,q,r 中没有 2，则所给数为大于 2 的偶数，矛盾. 同理，若没有 3 或 5，该数分别被 3 或 5 整除且大于对应素数，也矛盾. 所以 $\{p,q,r\}=\{2,3,5\}$. 又 $2^4+3^4+5^4-3=719$ 为质数，故三者任意排列均可，共 $3!=6$ 组.

答案：6.

17. 已知 p,q 为非负实数，函数 $f(x)=x^2+px+q$ 存在零点. 若正整数 a,b 满足 $f(a)<f(b)\le 1.001f(a)$，求 $f(b)-f(a)$ 的最小值的整数部分.

解 由零点存在知 $p^2\ge 4q$，故 $f(a)\le(a+\frac{p}{2})^2$. 设 $D=f(b)-f(a)$. 因 f 在正轴递增且 a,b 为正整数，$b\ge a+1$，所以 $D\ge 2a+p+1$. 另一方面 $D\le\frac{1}{1000}f(a)$. 令 $X=2a+p+1$，则 $1000X\le\frac{(X-1)^2}{4}$，解得 $X\ge 2001+\sqrt{2001^2-1}$，从而整数部分至少为 4001. 取 $a=2000,b=2001,p=1,q=\frac{1}{4}$ 可使整数部分达到该值.

答案：4001.

18. 已知方程 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0(a,b\in\mathbb{R})$ 的四个根均为正实数，不要求互异，求 b 的取值范围.

解 除以 x^2 并令 $t=x+\frac{1}{x}$. 正根对应 $t\ge 2$，原式化为 $t^2+at+b-2=0$. 四个正根且允许重根，等价于此二次方程有两个根 $t_1,t_2\ge 2$，允许相等. 于是 $b-2=t_1t_2\ge 4$，故 $b\ge 6$. 反向取任意 $t_1,t_2\ge 2$ 且 $t_1t_2=b-2$ 即可构造，所以范围为 $[6,+\infty)$.

答案：$[6,+\infty)$.

19. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$F$ 为椭圆右焦点，P 为椭圆上动点，求 $|OP|+|PF|$ 的最大值.

解 设左焦点为 F'，则 $|PF|+|PF'|=6$，且 $|OF'|=\sqrt{5}$. 由三角形不等式，$|OP|-|PF'|\le|OF'|$，故 $|OP|+|PF|\le 6+\sqrt{5}$. 取 $P=(-3,0)$ 时等号成立.

答案：$6+\sqrt{5}$.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=0,a_1=1$. 对任意整数 $n\ge 2$，都存在 $k(1\le k\le n)$，使得 a_n 为 $a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_{n-k}$ 这 k 项的算术平均数，求 $a_{2026}-a_{2025}$ 的最小值.

解 记 $S_n=a_1+\cdots+a_n$. 由平均数条件归纳得 $a_n\le 1$，且有 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}\le\dfrac{S_n}{n}$ 与 $\dfrac{S_{n+1}}{n+2}\ge\dfrac{S_n}{n+1}$. 于是 $a_{2025}\le\dfrac{S_{2024}}{2024}$，并且

$$a_{2026}-a_{2025}\ge\frac{S_{2025}}{2026}-a_{2025}\ge-\frac{S_{2024}}{2024\cdot 2026}\ge-\frac{1}{2026}.$$

取 $a_1=\cdots=a_{2025}=1$，$a_{2026}=\dfrac{2025}{2026}$，可取等.

答案：$-\dfrac{1}{2026}$.

9

3 答案汇总

1	2	2	9i
3	16	4	4
5	2026	6	$2+2\sqrt{2}$
7	$\left(-\sqrt{2},\frac{3}{2}\right]$	8	1
9	2	10	$\sqrt{5}$
11	$-\sqrt{3}$	12	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
13	0	14	7
15	1366200	16	6
17	4001	18	$[6,+\infty)$
19	$6+\sqrt{5}$	20	$-\frac{1}{2026}$

10