Zeckendorf 定理与黄金进制

2021-04-03 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_59fbcd33093de679

Zeckendorf 定理：任意一个正整数 n 都可以唯一地表示成下述形式

$$n = a_k F_k + a_{k-1} F_{k-1} + \cdots + a_1 F_1.$$

其中 F_i 为斐波那契数列 $(F_0 = F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n)$ 的第 i 项，且 $a_i \in \{0, 1\}, (1 \le i \le k)$，并且 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中没有相邻的两个数均 1.

证明用数学归纳法证明.

当 $n = 1$ 时，只能是 $n = F_1$，故命题成立；

设命题对所有小于 n 的正整数均成立，考虑 n 的情形.

注意到，对这个 n，存在唯一的正整数 k，使得 $F_k \le n < F_{k+1}$，那么由归纳假设，$n - F_k$ 有唯一表示，设

$$n - F_k = a_s F_s + a_{s-1} F_{s-1} + \cdots + a_1 F_1.$$

则由 $n < F_{k+1}$ 可知，$s < k - 1$，从而有表示

$$n = F_k + a_s F_s + a_{s-1} F_{s-1} + \cdots + a_1 F_1.$$

上述表示的唯一性可以利用 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中没有相邻的两个数均 1 及归纳假设可知.

($n = F_k$ 时表示的唯一性可由 $s < k$，且 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中没有相邻的两个数均 1 时，$a_s F_s + a_{s-1} F_{s-1} + \cdots + a_1 F_1 < F_{s+1}$ 可知)

综上可知，命题成立.

定理中的表达式可以写成 $n = (a_k a_{k-1} \cdots a_1)_F$，其中 $a_i \in \{0, 1\}$，这与二进制表示有着相似之处，只是多了条件：$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中没有相邻的两个数均 1.

我们将这样的表达形式称作 Zeckendorf 表述法（又称斐波那契进制）.

由于斐波那契进制与一般进制相比，其并不是一个固定进制，所以在计算时会比较复杂. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，即相邻位值之比趋于黄金分割比. 我们可以用 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 进制（黄金进制）来代替斐波那契进制.

(2006 年亚太地区数学奥林匹克第 2 题)

证明：每一个正整数均可以表示成若干个 $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 的不同次幂之和.

证明注意到 $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$，我们有 $2\varphi^n = \varphi^n + \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} = \varphi^{n+1} + \varphi^{n-2}$.

对于任意正整数 k，先将其写成 $k = k \cdot \varphi^0$，每一次将其中 2 个 φ^n 擦除，变为 $\varphi^{n+1} + \varphi^{n-2}$.

注意到这样的操作前后，φ 的幂的个数是不变的，且每次所有指数之和减少 1.

经过 $3k^2$ 次操作后，指数之和变为 $-3k^2$.

将 $-3k$ 到 -1 中的整数分为 $(-1, -2, -3)$，$(-4, -5, -6)$，$\cdots$，$(-3k+2, -3k+1, -3k)$ 这 k 组.

那么每次操作，我们将 φ^n 变为 φ^{n-2}，或将 φ^{n-2} 变为 φ^{n-1}，或将 φ^{n-1} 变为 φ^n，即每次操作无法使上述的每一组中不含 φ 的某个次幂.

也就是说，经过 $3k^2$ 次操作后，恰好每一组中均含 φ 的某个次幂，这与指数和为 $-3k^2$ 矛盾.
故经过不到 $3k^2$ 次操作后，操作停止，此时 k 已被表示成若干个 $\varphi=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 的不同次幂之和.
如 $1=\varphi^0, 2=\varphi^1+\varphi^{-2}, 3=\varphi^1+\varphi^0+\varphi^{-2}, 4=\varphi^2+\varphi^0+\varphi^{-3}+\varphi^{-4}, 5=\varphi^2+\varphi^1+\varphi^{-2}+\varphi^{-3}+\varphi^{-4}$,
……
这样的表示方法不唯一，上述证明给出了将 k 表示为 k 个 $\varphi=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 的不同次幂之和的方法.
事实上，类比 Zeckendorf 定理，在加上条件 “不存在两个相邻的次幂” 后，表示方法是唯一的.
于是我们将此题进行了推广，此时的表示法被称作黄金进制，读者可以自行证明.
在黄金进制中，可以用有限小数或循环小数表示任意非负有理数，以及从有理数和 $\sqrt{5}$ 生成的数域

$$\mathbb{Q}[\sqrt{5}]=\{a+b\sqrt{5}|a,b\in\mathbb{Q}\}$$

中的非负元素.

用上述观点，我们可以解决以下问题：

1. （**奥数教程高一分册**）我们称一个由正整数组成的无穷数列为 F-数列，如果从第 3 项起，该数列的每一项都等于它前面两项之和. 问：能否将正整数集分划为
   （1）有限个互不相交的；
   （2）无穷多个互不相交的；F-数列的并？

2. （**2020 年巴西数学奥林匹克**）对正整数 a，定义 $F_1^{(a)}=1$，$F_2^{(a)}=a$，且对 $n>2$，$F_n^{(a)}=F_{n-1}^{(a)}+F_{n-2}^{(a)}$. 若对正整数 x，存在正整数 a 以及正整数 $n>3$，使得 $x=F_n^{(a)}$，就称 x 是 “飞波的”. 求证：存在无限多个正整数，不为 “飞波的”.