2025 年 MEMO 团体赛第 1 题及解答

2025-09-04　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5a4eac3ecd0d5ad6

上午刚看到的题，感谢赵力博士的翻译。第 1 题比较简单，很快就做出来了，顺手写一下。

题目：（2025 年 MEMO 团体赛第 1 题）

Bob 有 n 枚硬币，其面值分别为正整数

$c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n > 0.$

他站在一台自动售货机前，售货机提供几种糖果，其价格分别为正整数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$. Bob 注意到对于每个 $i \in \{1, \cdots, n\}$，都有

$b_1 + b_2 + \cdots + b_i \geq c_1 + c_2 + \cdots + c_i.$

此外，Bob 的硬币总价值等于所有糖果成本的总和. 糖果可以以任意顺序购买. 为了购买第 i 种糖果，Bob 必须插入总价值至少为 b_i 的硬币. 然而，售货机不会找零. 证明：Bob 可以购买至少一半的糖果.

解答（PDF 中已展开）

解答：

将 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 排列为

$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n.$

则 $\forall 1 \leq k \leq n$,

$\sum_{i=1}^{k} a_k \geq \sum_{i=1}^{k} b_i \geq \sum_{i=1}^{k} c_i$

结合 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i$ 知：$\forall 1 \leq k \leq n$，$\sum\limits_{i=k}^{n} c_i \geq \sum\limits_{i=k}^{n} a_i.$

取 $k = n$ 得，$c_n \geq a_n.$

若存在 $1 \leq j \leq [\frac{n}{2}]$，使得 $c_{n-2j} + c_{n-2j+1} < a_{n-j}$，则

$$\begin{aligned} c_n &\leq c_{n-1} + c_{n-2} \leq \cdots \leq c_{n-2j} + c_{n-2j+1} \\ &< a_{n-j} \leq a_{n-j-1} \leq \cdots \leq a_{n-2j} \end{aligned}$$

于是

$\sum_{i=n-2j}^{n} c_i < \sum_{i=n-2j}^{n-j} a_i < \sum_{i=n-2j}^{n} a_i$

矛盾！于是 $\forall 1 \leq j \leq [\frac{n}{2}]$，都有

$c_{n-2j} + c_{n-2j+1} \geq a_{n-j}.$

于是用面值为 c_n 的硬币可以买价格为 a_n 的糖果，用面值为 c_{n-2j} 和 c_{n-2j+1} 的硬币可以买价格为 a_{n-j} 的糖果（$1 \leq j \leq [\frac{n}{2}]$）.

这样，用不同的硬币共可以买到价格为 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_{n-[\frac{n}{2}]}$ 的糖果，总数为 $[\frac{n}{2}] + 1 > \frac{n}{2}.$