用代数方法证明深圳中学二轮二阶压轴题

2024-04-08 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5b9d267b323a6d0c

深圳中学 2024 届高三二轮二阶测试压轴题如下：

已知曲线 $y=\ln x+a$ $(a\in\mathbb{R})$ 和圆 $O:x^2+y^2=r^2$ $(r\in\mathbb{R},\ r>0)$ 相交于 A,B 两个不同点，记直线 AB 的斜率为 k.

(1) 当 $r=\sqrt{2}$ 时，证明：$a>-1$；

(2) 当 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，证明：$k>\sqrt{2}$.

分析 主要处理思路是利用和 $\ln x$ 有关的两个常用不等式：

$$\ln x\le x-1$$

$$\ln x_1-\ln x_2>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2},x_1>x_2$$

来消除题目中的 $\ln x$，转化为代数不等式问题求解.

上面两个不等式的证明略.

证明 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，不妨设 $x_1>x_2$.

(1) 若 $a\le -1$，则

$$y_1=\ln x_1+a\le (x_1-1)+(-1)=x_1-2$$

即 $x_1-y_1\ge 2$，由 Cauchy 不等式：

$$4=2(x_1^2+y_1^2)\ge (x_1-y_1)^2\ge 4$$

等号恰好成立，因此 $x_1=1$，$y_1=-1$.

同理 $x_2=1$，这与 $x_1>x_2$ 矛盾，因此 $a>-1$.

(2) 由题意知:

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2=\dfrac{3}{4} & \cdots\cdots ① \\ x_2^2+y_2^2=\dfrac{3}{4} & \cdots\cdots ② \\ y_1=\ln x_1+a & \cdots\cdots ③ \\ y_2=\ln x_2+a & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

由 $x_1>x_2$ 知: $y_1>y_2$, 于是 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}>0$.

由 ③ + ④:

$$y_1-y_2=\ln x_1-\ln x_2>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$$
$$\Longleftrightarrow k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}\Longleftrightarrow x_1+x_2>\frac{2}{k}>0$$

由 ① − ②:

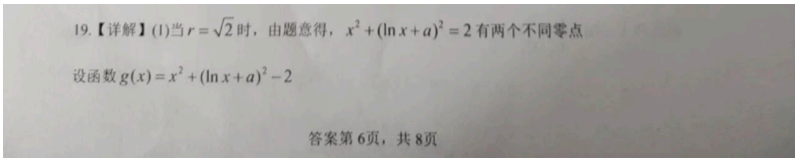
$$x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2=0$$
$$\Longleftrightarrow y_1+y_2=-\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{y_1-y_2}=-\frac{x_1+x_2}{k}$$

由 $2\times$ (① + ②):

$$3=2(x_1^2+x_2^2)+2(y_1^2+y_2^2)>(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2$$
$$=(x_1+x_2)^2+\frac{(x_1+x_2)^2}{k^2}>\left(\frac{2}{k}\right)^2+\frac{\left(\frac{2}{k}\right)^2}{k^2}$$
$$\Longleftrightarrow 3k^4-4k^2-4>0\Longleftrightarrow (k^2-2)(3k^2+2)>0$$
$$\Longleftrightarrow k>\sqrt{2}$$

2

附参考答案:


19.【详解】(1)当 $r=\sqrt{2}$ 时，由题意得，$x^2+(\ln x+a)^2=2$ 有两个不同零点

设函数 $g(x)=x^2+(\ln x+a)^2-2$

答案第 6页，共 8页

则 $g'(x)=2x+\frac{2(\ln x+a)}{x}=\frac{2}{x}(x^2+\ln x+a)$ ……2 分

易知 $\varphi(x)=x^2+\ln x+a$ 在 $x>0$ 时单调递增

且 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$

由零点存在定理知，存在 $x_0>0$，使得 $x_0^2+\ln x_0+a=0$

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$

∴函数 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，在 $(x_0,+\infty)$ 递增……5 分

又∵ $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

∴ $g(x)$ 有两个不同零点等价于 $g(x_0)<0$

即 $x_0^2+(\ln x_0+a)^2-2=x_0^2+x_0^4-2<0$，解得 $x_0^2<1$

∴ $a=-x_0^2-\ln x_0>-1$ ……8 分

(2)取线段 AB 中点 E，要证明 $k>\sqrt{2}$，只需证明 $k_{OE}>-\frac{\sqrt{2}}{2}$

设 OA 倾斜角为 θ_1，OB 倾斜角为 θ_2，$\theta_1,\theta_2\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

则 OE 倾斜角为 $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$，只需证明 $\tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2}>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……9 分

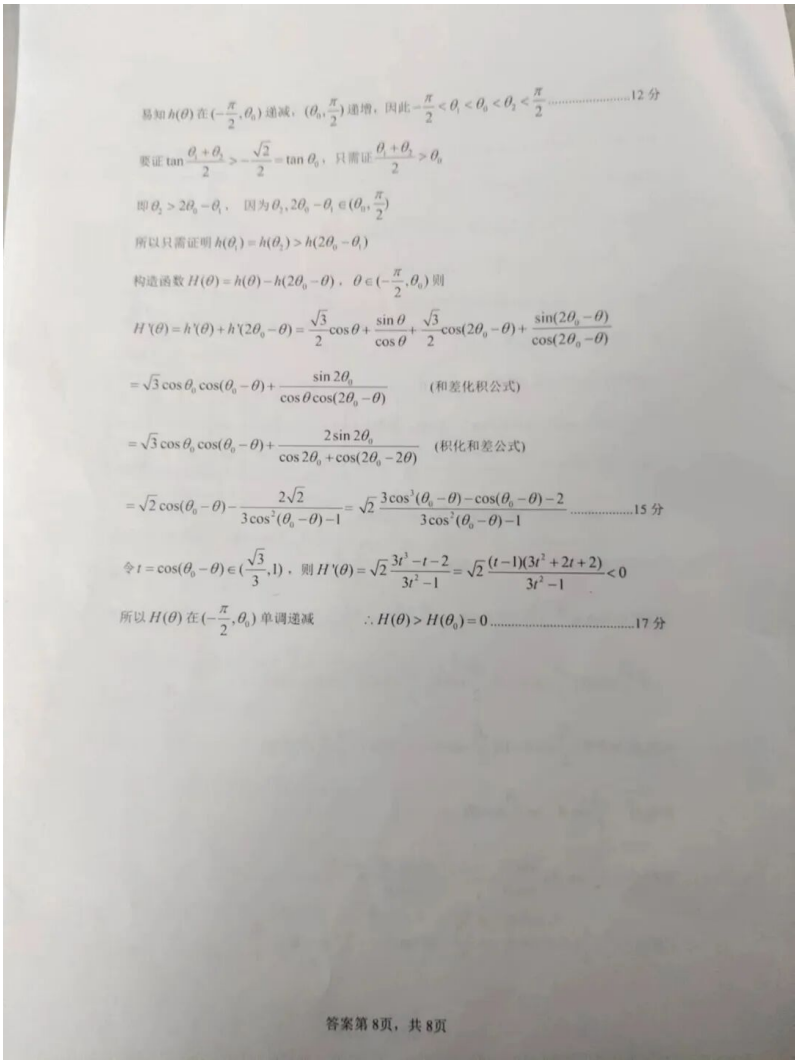
∵ $A(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_1,\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_1),B(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_2,\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_2)$ 在曲线 $y=\ln x+a$ 上

∴ θ_1,θ_2 为方程 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\ln(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)-a=0$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的两根

令 $h(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\ln(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)-a$

则 $h'(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{(1+\sqrt{3}\sin\theta)(\sqrt{3}-\sin\theta)}{2\cos\theta}$ ……11 分

记 $\theta_0\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 满足 $\sin\theta_0=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\tan\theta_0=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\theta_0=\frac{\sqrt{6}}{3}$



易知 $h(\theta)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\theta_0)$ 递减，$(\theta_0,\frac{\pi}{2})$ 递增，因此 $-\frac{\pi}{2}<\theta_1<\theta_0<\theta_2<\frac{\pi}{2}$ ……12 分

要证 $\tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2}>-\frac{\sqrt{2}}{2}=\tan\theta_0$，只需证 $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}>\theta_0$

即 $\theta_2>2\theta_0-\theta_1$，因为 $\theta_1,2\theta_0-\theta_1\in(\theta_0,\frac{\pi}{2})$

所以只需证明 $h(\theta_1)=h(\theta_2)>h(2\theta_0-\theta_1)$

构造函数 $H(\theta)=h(\theta)-h(2\theta_0-\theta)$，$\theta\in(-\frac{\pi}{2},\theta_0)$ 则

$$H'(\theta)=h'(\theta)+h'(2\theta_0-\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2\theta_0-\theta)+\frac{\sin(2\theta_0-\theta)}{\cos(2\theta_0-\theta)}$$

$$=\sqrt{3}\cos\theta_0\cos(\theta_0-\theta)+\frac{\sin 2\theta_0}{\cos\theta\cos(2\theta_0-\theta)}\quad\text{(和差化积公式)}$$

$$=\sqrt{3}\cos\theta_0\cos(\theta_0-\theta)+\frac{2\sin 2\theta_0}{\cos 2\theta_0+\cos(2\theta_0-2\theta)}\quad\text{(积化和差公式)}$$

$$=\sqrt{2}\cos(\theta_0-\theta)-\frac{2\sqrt{2}}{3\cos^2(\theta_0-\theta)-1}=\sqrt{2}\frac{3\cos^3(\theta_0-\theta)-\cos(\theta_0-\theta)-2}{3\cos^2(\theta_0-\theta)-1}$$ ……15 分

令 $t=\cos(\theta_0-\theta)\in(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$，则 $H'(\theta)=\sqrt{2}\frac{3t^3-t-2}{3t^2-1}=\sqrt{2}\frac{(t-1)(3t^2+2t+2)}{3t^2-1}<0$

所以 $H(\theta)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\theta_0)$ 单调递减　　$\therefore H(\theta)>H(\theta_0)=0$ ……17 分

答案第 8页，共 8页

深圳中学 2024 届高三二轮二阶测试压轴题如下：

已知曲线$y=\ln x+a$（$a\in\mathbb{R}$）和圆$O:x^2+y^2=r^2$（$r\in\mathbb{R}$，$r>0$）相交于A,B两个不同点，
↪ 记直线AB的斜率为k. \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 当$r=\sqrt{2}$时，证明：$a>-1$；\item
↪ 当$r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时，证明：$k>\sqrt{2}$. \end{enumerate}\begin{analysis}主要处理思路是利用和$\ln
↪ x$有关的两个常用不等式：$$\ln x\le x-1$$$$\ln x_1-\ln x_2>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2},x_1>x_2$$来消除题目中的$\ln x$，
↪ 转化为代数不等式问题求解.
上面两个不等式的证明略. \end{analysis}\begin{proof}
设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，不妨设 $x_1>x_2$.
\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 若$a\le -1$，则$$y_1=\ln x_1+a\le(x_1-1)+(-1)=x_1-2$$即$x_1-y_1\ge 2$，
↪ 由Cauchy不等式：$$4=2(x_1^2+y_1^2)\ge(x_1-y_1)^2\ge 4$$等号恰好成立，因此$x_1=1$，$y_1=-1$.
同理$x_2=1$，这与$x_1>x_2$矛盾，因此$a>-1$. \nextpage\item 由题意知：$$\begin{cases}x_1^2+y_1^2=\dfrac{3}{4}&\qquad\」
↪ cdots\cdots\circled{1}\\x_2^2+y_2^2=\dfrac{3}{4}&\qquad\cdots\cdots\circled{2}\\y_1=\ln
↪ x_1+a&\qquad\cdots\cdots\circled{3}\\y_2=\ln x_2+a&\qquad\cdots\cdots\circled{4}\end{cases}$$
由 $x_1>x_2$ 知：$y_1>y_2$，于是 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}>0$.
由$\circled{3}+\circled{4}$：$$\begin{aligned}&y_1-y_2=\ln x_1-\ln
↪ x_2>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}\\\iff&k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}\iff x_1+x_2>\frac{2}{k}>0\end{aligned}$$
由$\circled{1}-\circled{2}$：$$\begin{aligned}&x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2=0\\\iff&y_1+y_2=-\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{y_1-y_2}=-\」
↪ frac{x_1+x_2}{k}\end{aligned}$$
由$2\times(\circled{1}+\circled{2})$：$$\begin{aligned}3&=2(x_1^2+x_2^2)+2(y_1^2+y_2^2)>(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\\&=(x_1+」
↪ x_2)^2+\frac{(x_1+x_2)^2}{k^2}>\left(\frac{2}{k}\right)^2+\frac{\left(\frac{2}{k}\right)^2}{k^2}\\\iff&3k^4-4k^2-4>0\iff(k^2-2)(3k^」
↪ 2+2)>0\\\iff&k>\sqrt{2}\end{aligned}$$\end{enumerate}\end{proof}