近 18 年 IMO 题目排序整理，平均得分最低的是……

2023-08-08　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5baa090dcc30f278

这个题目排序是很久之前就想做的，原因是我认为考试分数才能准确反映一道竞赛题的难易程度。

这里整理了 2006 年——2023 年共 18 年 108 道 IMO 试题的平均得分，按照从高到低排列（满分 7 分），数据和题目均来源于 IMO 官网。

一、2017 年第 1 题（平均分 5.943）

第 1 题. 对每个整数 $a_0 > 1$, 定义数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 如下: 对于任意的 $n \geqslant 0$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{若 } \sqrt{a_n} \text{ 是一个整数,} \\ a_n + 3, & \text{其它情况.} \end{cases}$$

试求满足下述条件的所有 a_0: 存在一个数 A, 使得对无穷多个 n, 有 $a_n = A$.

二、2023 年第 1 题（平均分 5.845）

第 1 题. 求所有满足下述条件的合数 $n > 1$: 如果 n 的所有正因子为 $d_1, d_2, \ldots, d_k$, 这里 $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, 那么对每个 $1 \leqslant i \leqslant k-2$, 均有 d_i 整除 $d_{i+1} + d_{i+2}$.

三、2007 年第 4 题（平均分 5.681）

问题 4. 在 ΔABC 中, $\angle BCA$ 的角平分线与 ΔABC 的外接圆交于点 R, 与边 BC 的垂直平分线交于点 P, 与边 AC 的垂直平分线交于点 Q. 设 K 与 L 分别是边 BC 和 AC 的中点. 证明: ΔRPK 和 ΔRQL 的面积相等.

四、2012 年第 1 题（平均分 5.625）

1. 设 J 为三角形 ABC 顶点 A 所对旁切圆的圆心. 该旁切圆与边 BC 相切于点 M，与直线 AB 和 AC 分别相切于点 K 和 L. 直线 LM 和 BJ 相交于点 F，直线 KM 与 CJ 相交于点 G. 设 S 是直线 AF 和 BC 的交点，T 是直线 AG 和 BC 的交点.

证明：M 是线段 ST 的中点.

五、2016 年第 1 题（平均分 5.614）

第 1 题. 已知三角形 BCF 中, 角 B 是直角. 在直线 CF 上取点 A, 使得 $FA = FB$, 且 F 在点 A 和 C 之间. 取点 D, 使得 $DA = DC$, 且 AC 是 $\angle DAB$ 的内角平分线. 取点 E, 使得 $EA = ED$, 且 AD 是 $\angle EAC$ 的内角平分线. 设 M 是线段 CF 的中点. 取点 X 使得 $AMXE$ 是一个平行四边形(这里 $AM \| EX, AE \| MX$).

证明: 直线 BD, FX 和 ME 三线共点.

六、2022 年第 1 题（平均分 5.540）

第 1 题. 奥斯陆银行发行两种硬币：铝币（记做 A）以及铜币（记做 B）。玛丽有 n 个铝币和 n 个铜币，他任意地将这些硬币排成一列。我们称相同材料的连续一小段硬币为「同花段」。给定一正整数 $k \leqslant 2n$，玛丽重复下列的操作：找出包含从左数第 k 个硬币的最长同花段，然后把这个同花段中的所有硬币移到整列硬币的最左边。举例来说，当 $n = 4$ 且 $k = 4$ 时，从 $AABBBABA$ 这个起始状态开始操作，过程会是

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots.$$

找出符合 $1 \leqslant k \leqslant 2n$ 的所有数对 (n, k)，使得不管是什么起始状态，在操作过程的某个时刻，最左边的 n 个硬币都是同一种材料的。

七、2022 年第 4 题（平均分 5.467）

第 4 题. 令 $ABCDE$ 为一凸五边形满足 $BC = DE$，假设在 $ABCDE$ 内部存在一点 T 使得 $TB = TD, TC = TE$ 且 $\angle ABT = \angle TEA$。令直线 AB 分别与直线 CD 和 CT 交于点 P 和 Q，假设 P, B, A, Q 在同一直线上按照此顺序排列。令直线 AE 分别与直线 CD 和 DT 交于点 R 和 S，假设 R, E, A, S 在同一直线上按照此顺序排列。证明 P, S, Q, R 落在同一个圆上。

八、2010 年第 1 题（平均分 5.450）

1. 求所有的函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ，使得等式

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

对所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 成立.（这里，$[z]$ 表示不超过实数 z 的最大整数.）

九、2013 年第 4 题（平均分 5.442）

第 4 题. 设三角形 ABC 是一个锐角三角形, 其垂心为 H, 设 W 是边 BC 上一点, 与顶点 B,C 均不重合. M 和 N 分别是过顶点 B 和 C 的高的垂足. 记三角形 BWN 的外接圆为 ω_1, 设 X 是 ω_1 上一点, 且 WX 是 ω_1 的直径. 类似地, 记三角形 CWM 的外接圆为 ω_2, 设 Y 是 ω_2 上一点, 且 WY 是 ω_2 的直径. 证明: 点 X, Y 和 H 共线.

十、2014 年第 1 题（平均分 5.348）

第 1 题. 设 $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ 是一个无穷正整数列. 证明: 存在惟一的整数 $n \geq 1$ 使得

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

十一、2011 年第 1 题（平均分 5.348）

1. 对任意由 4 个不同正整数组成的集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，记 $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$，设 n_A 是满足 $a_i + a_j (1 \leq i < j \leq 4)$ 整除 s_A 的数对（i，j）的个数．求所有由 4 个不同正整数组成的集合 A，使得 n_A 达到最大值.

十二、2010 年第 4 题（平均分 5.345）

4. 设 P 是三角形 ABC 内部的一点，直线 AP，BP，CP 与三角形 ABC 的外接圆 Γ 的另一个交点分别为 K，L，M．圆 Γ 在点 C 处的切线与直线 AB 相交于点 S．假设 $SC = SP$，证明: $MK = ML$.

十三、2020 年第 1 题（平均分 5.313）

第 1 题. 考虑凸四边形 $ABCD$. 设 P 是 $ABCD$ 内部一点. 且以下比例等式成立:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

证明: $\angle ADP$ 的内角平分线、$\angle PCB$ 的内角平分线和线段 AB 的垂直平分线三线共点.

十四、2016 年第 1 题（平均分 5.272）

第 1 题. 已知三角形 BCF 中, 角 B 是直角. 在直线 CF 上取点 A, 使得 $FA = FB$, 且 F 在点 A 和 C 之间. 取点 D, 使得 $DA = DC$, 且 AC 是 $\angle DAB$ 的内角平分线. 取点 E, 使得 $EA = ED$, 且 AD 是 $\angle EAC$ 的内角平分线. 设 M 是线段 CF 的中点. 取点 X 使得 $AMXE$ 是一个平行四边形(这里 $AM \| EX, AE \| MX$).

证明: 直线 BD, FX 和 ME 三线共点.

十五、2014 年第 4 题（平均分 5.189）

第 4 题. 点 P 和 Q 在锐角三角形 ABC 的边 BC 上, 满足 $\angle PAB = \angle BCA$ 且 $\angle CAQ = \angle ABC$. 点 M 和 N 分别在直线 AP 和 AQ 上, 使得 P 是 AM 的中点, 且 Q 是 AN 的中点. 证明: 直线 BM 和 CN 的交点在三角形 ABC 的外接圆上.

十六、2019 年第 1 题（平均分 5.179）

第1题. 用$\mathbb{Z}$表示全体整数构成的集合. 求所有函数$f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, 满足对任意整数$a$和$b$, 都有

$$f(2a)+2f(b)=f(f(a+b)).$$

十七、2017 年第 4 题（平均分 5.029）

第 4 题. 设 R 和 S 是圆 Ω 上互异两点, 且 RS 不是直径. 设 ℓ 是圆 Ω 在点 R 处的切线. 平面上一点 T 满足, 点 S 是线段 RT 的中点. J 是圆 Ω 的劣弧 RS 上一点, 使得三角形 JST 的外接圆 Γ 交 ℓ 于两个不同点. 记 Γ 与 ℓ 的交点中接近 R 的那个为 A. 直线 AJ 交圆 Ω 于另一点 K. 证明, 直线 KT 和圆 Γ 相切.

十八、2006 年第 4 题（平均分 4.998）

四、求所有的整数对$(x,\ y)$， 使得

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2.$$

十九、2008 年第 1 题（平均分 4.979）

1. 已知 H 是锐角三角形 ABC 的垂心，以边 BC 的中点为圆心，过点 H 的圆与直线 BC 相交于两点 A_1, A_2；以边 CA 的中点为圆心，过点 H 的圆与直线 CA 相交于两点 B_1, B_2；以边 AB 的中点为圆心，过点 H 的圆与直线 AB 相交于两点 C_1, C_2. 证明：六点 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 共圆.

二十、2018 年第 1 题（平均分 4.934）

第1题. 设Γ是锐角三角形ABC的外接圆. 点D和E分别在线段AB和AC上, 满足$AD=AE$. 线段BD和CE的垂直平分线分别与Γ的劣弧$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{AC}$交于点F和G. 证明: 直线DE与FG平行(或重合).

二十一、2009 年第 1 题（平均分 4.804）

1. 设 n 是一个正整数， $a_1, a_2, \cdots, a_k (k \geq 2)$ 是集合 $\{1, \cdots, n\}$ 中的互不相同的整数，使得对于 $i = 1, \cdots, k-1$， 都有 n 整除 $a_i(a_{i+1}-1)$. 证明：n 不整除 $a_k(a_1-1)$.

二十二、2015 年第 4 题（平均分 4.794）

第 4 题. 在三角形ABC中, Ω是其外接圆, O是其外心. 以A为圆心的一个圆Γ与线段BC交于两点D和E, 使得点B, D, E, C互不相同, 并且按此顺序排列在直线BC上. 设F和G是Γ和Ω的两个交点, 并且使得点 A, F, B, C, G按此顺序排列在Ω上. 设K是三角形BDF的外接圆和线段AB的另一个交点. 设L是三角形CGE的外接圆和线段CA的另一个交点.
假设直线FK和GL不相同, 且相交于点X. 证明: X在直线AO上.

二十三、2016 年第 4 题（平均分 4.744）

第 4 题. 一个由正整数构成的集合称为芳香集, 若它至少有两个元素, 且其中每个元素都与其它元素中的至少一个元素有公共的素因子. 设$P(n)=n^2+n+1$. 试问: 正整数b最小为何值时能够存在一个非负整数a, 使得集合

$$\{P(a+1), P(a+2), \cdots, P(a+b)\}$$

是一个芳香集?

二十四、2023 年第 4 题（平均分 4.717）

第 4 题. 设 $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ 为两两不等的正实数, 使得对每个 $n = 1, 2, \ldots, 2023$,

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

都是一个整数. 证明: $a_{2023} \geqslant 3034$.

二十五、2008 年第 4 题（平均分 4.402）

4. 求所有的函数 $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$， 满足对所有的正实数 w，x，y，z，$wx=yz$，都有

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}.$$

二十六、2021 年第 1 题（平均分 4.394）

第 1 题. 设整数 $n \geqslant 100$. 伊凡把 $n, n+1, \ldots, 2n$ 的每个数写在不同的卡片上. 然后他将这 $n+1$ 张卡片打乱顺序并分成两堆. 证明: 至少有一堆中包含两张卡片, 使得这两张卡片上的数之和是一个完全平方数.

二十七、2015 年第 1 题（平均分 4.307）

第 1 题. 我们称平面上一个有限点集$\mathcal{S}$是*平衡*的, 如果对$\mathcal{S}$中任意两个不同的点A, B, 都存在$\mathcal{S}$中一点C, 满足$AC = BC$. 我们称$\mathcal{S}$是*无中心*的, 如果对$\mathcal{S}$中任意三个不同的点A, B, C, 都不存在$\mathcal{S}$中一点P, 满足$PA = PB = PC$.

(a) 证明: 对每个整数$n \geqslant 3$, 均存在一个由n个点构成的平衡点集.

(b) 确定所有的整数$n \geqslant 3$, 使得存在一个由n个点构成的平衡且无中心的点集.

二十八、2022 年第 2 题（平均分 4.306）

第 2 题. 令 $\mathbb{R}^+$ 代表所有正实数所形成的集。找出所有函数 $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, 使得对于任意 $x \in \mathbb{R}^+$, 都恰好有一个 $y \in \mathbb{R}^+$ 符合

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

二十九、2013 年第 1 题（平均分 4.108）

第 1 题. 证明对于任意一对正整数 k 和 n, 都存在 k 个 (不必不相同的) 正整数 $m_1, m_2, \ldots, m_k$, 使得

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

三十、2011 年第 4 题（平均分 4.069）

4. 给定整数 $n > 0$．有一个天平和 n 个重量分别为 $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$ 的砝码.

现通过 n 步操作逐个将所有砝码都放上天平，使得在操作过程中，右边的重量总不超过左边的重量．每一步操作是从尚未放上天平的砝码中选择一个砝码，将其放到天平的左边或右边，直至所有砝码都被放上天平.

求整个操作过程的不同方法个数.

三十一、2018 年第 4 题（平均分 3.961）

第4题. 我们所谓一个**位置**是指直角坐标平面上的一个点(x, y), 其中x, y都是不超过20的正整数.

最初时, 所有400个位置都是空的. 甲乙两人轮流摆放石子, 由甲先进行. 每次轮到甲时, 他在一个空的位置上摆上一个新的红色石子, 要求任意两个红色石子所在位置之间的距离都不等于$\sqrt{5}$. 每次轮到乙时, 他在任意一个空的位置上摆上一个新的蓝色石子. (蓝色石子所在位置与其它石子所在位置之间距离可以是任意值.) 如此这般进行下去直至某个人无法再摆放石子.

试确定最大的整数K, 使得无论乙如何摆放蓝色石子, 甲总能保证至少摆放K个红色石子.

三十二、2020 年第 4 题（平均分 3.938）

第 4 题. 给定整数 $n > 1$. 在一座山上有 n^2 个高度互不相同的缆车车站. 有两家缆车公司 A 和 B, 各运营 k 辆缆车; 每辆从一个车站运行到某个更高的车站 (中间不停留其他车站). A 公司的 k 辆缆车的 k 个起点互不相同, k 个终点也互不相同, 并且起点较高的缆车, 它的终点也较高. B 公司的缆车也满足相同的条件. 我们称两个车站被某个公司连接, 如果可以从其中较低的车站通过该公司的一辆或多辆缆车到达较高的车站 (中间不允许在车站之间有其他移动).

确定最小的正整数 k, 使得一定有两个车站被两个公司同时连接.

三十三、2021 年第 4 题（平均分 3.817）

第 4 题. 设圆 Γ 的圆心为 I. 凸四边形 $ABCD$ 满足: 线段 AB, BC, CD 和 DA 都与 Γ 相切. 设 Ω 是三角形 AIC 的外接圆. BA 往 A 方向的延长线交 Ω 于点 X, BC 往 C 方向的延长线交 Ω 于点 Z, AD 往 D 方向的延长线交 Ω 于点 Y, CD 往 D 方向的延长线交 Ω 于点 T. 证明:

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

三十四、2021 年第 4 题（平均分 3.766）

4. 求所有的函数 f ：$\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，使得对所有满足 $a+b+c=0$ 的整数 a,b,c，都有

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2 = 2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).$$

（这里$\mathbb{Z}$表示整数集.）

三十五、2019 年第 4 题（平均分 3.736）

第4题. 求所有正整数对(k,n), 满足

$$k! = (2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1}).$$

三十六、2009 年第 2 题（平均分 3.710）

2. 设 O 是三角形 ABC 的外心. 点 P 和 Q 分别是边 CA 和 AB 的内点. 设 K，L 和 M 分别是线段 BP，CQ 和 PQ 的中点，Γ 是过点 K，L 和 M 的圆. 若直线 PQ 与圆 Γ 相切，证明：$OP = OQ$.

三十七、2019 年第 5 题（平均分 3.567）

第5题. 巴斯银行发行的硬币在一面上铸有H, 在另一面上铸有T. 哈利有n枚这样的硬币并将这些硬币从左至右排成一行. 他反复地进行如下操作: 如果恰有$k\,(>0)$枚硬币H面朝上, 则他将从左至右的第k枚硬币翻转; 如果所有硬币都是T面朝上, 则停止操作. 例如: 当$n=3$, 并且初始状态是THT, 则操作过程为$THT \to HHT \to HTT \to TTT$, 总共进行了三次操作后停止.

(a) 证明: 对每个初始状态, 哈利总在有限次操作后停止.

(b) 对每个初始状态C, 记$L(C)$为哈利从初始状态C开始至停止操作时的操作次数, 例如$L(THT)=3$, $L(TTT)=0$. 求C取遍所有2^n个可能的初始状态时得到的$L(C)$的平均值.

三十八、2022 年第 5 题（平均分 3.520）

第 5 题. 找出所有三元正整数组 (a,b,p)，满足 p 是素数且

$$a^p = b! + p.$$

三十九、2007 年第 1 题（平均分 3.383）

问题 1. 给定实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$. 对每个 i $(1 \le i \le n)$, 定义:

$$d_i = \max\{a_j : 1 \le j \le i\} - \min\{a_j : i \le j \le n\},$$

且令

$$d = \max\{d_i : 1 \le i \le n\}.$$

(a) 证明: 对任意实数 $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, 有

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) 证明: 存在实数 $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ 使得 $(*)$ 中的等号成立.

四十、2011 年第 5 题（平均分 3.259）

5. 设 f 是一个定义在整数集上取值为正整数的函数，已知对任意两个整数 m, n，差 $f(m)-f(n)$ 能被 $f(m-n)$ 整除. 证明：对所有整数 m，n，若 $f(m) \le f(n)$，则 $f(n)$ 被 $f(m)$ 整除.

四十一、2023 年第 2 题（平均分 3.162）

第 2 题. 在锐角三角形 ABC 中, $AB < AC$. 设 Ω 为三角形 ABC 的外接圆. 点 S 是 Ω 上包含点 A 的弧 CB 的中点. 过点 A 作垂直于 BC 的直线与 BS 交于点 D, 与圆 Ω 交于另一点 $E \ne A$. 过点 D 且平行于 BC 的直线与直线 BE 交于点 L. 记 ω 为三角形 BDL 的外接圆. 设 ω 与 Ω 交于另一点 $P \ne B$.

证明: ω 在点 P 处的切线与直线 BS 的交点在 $\angle BAC$ 的内角平分线上.

四十二、2014 年第 2 题（平均分 2.971）

第 2 题. **设** $n \ge 2$ 是一个整数. 考虑由 n^2 个单位正方形组成的一个 $n \times n$ 棋盘. 一种放置 n 个棋子“车”的方案被称为是 *和平的*, 如果每一行和每一列上都恰好有一个“车”. 求最大的正整数 k, 使得对于任何一种和平放置 n 个“车”的方案, 都存在一个 $k \times k$ 的正方形, 它的 k^2 个单位正方形里都没有“车”.

四十三、2018 年第 2 题（平均分 2.946）

第2题. 求所有整数$n \geqslant 3$, 使得存在实数$a_1, a_2, \cdots, a_{n+2}$, 满足$a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$, 并且对$i = 1, 2, \cdots, n$, 都有

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}.$$

四十四、2009 年第 4 题（平均分 2.915）

4. 在三角形 ABC 中，$AB = AC$，$\angle CAB$ 和 $\angle ABC$ 的内角平分线分别与边 BC 和 CA 相交于点 D 和 E. 设 K 是三角形 ADC 的内心. 若 $\angle BEK = 45^\circ$，求 $\angle CAB$ 所有可能的值.

四十五、2020 年第 5 题（平均分 2.797）

第 5 题. 有一叠 $n > 1$ 张卡片. 在每张卡片上写有一个正整数. 这叠卡片具有如下性质：其中任意两张卡片上的数的算术平均值也等于这叠卡片中某一张或几张卡片上的数的几何平均值.

确定所有的 n, 使得可以推出这叠卡片上的数均相等?

四十六、2018 年第 5 题（平均分 2.695）

第5题. 设$a_1, a_2, \cdots$是一个无限项正整数序列. 已知存在整数$N > 1$, 使得对每个整数$n \geqslant N$,

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

都是整数. 证明: 存在正整数M, 使得$a_m = a_{m+1}$对所有整数$m \geqslant M$都成立.

四十七、2010 年第 2 题（平均分 2.578）

2. 设三角形 ABC 的内心是 I，外接圆为 Γ．直线 AI 交圆 Γ 于另一点 D．设 E 是弧 $\overset{\frown}{BDC}$ 上的一点，F 是边 BC 上的一点，使得

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC .$$

设 G 是线段 IF 的中点．证明：直线 DG 与 EI 的交点在圆 Γ 上．

四十八、2008 年第 2 题（平均分 2.563）

2. （a）设实数 x，y，z 都不等于 1，满足 $xyz=1$，求证：

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1.$$

（b）证明：存在无穷多组三元有理数组（x，y，z），x，y，z 都不等于 1，且 $xyz=1$，使得上述不等式等号成立.

四十九、2012 年第 2 题（平均分 2.550）

2. 设整数 $n\geq 3$，正实数 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 满足 $a_2a_3\cdots a_n=1$．证明：

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n>n^n .$$

五十、2013 年第 2 题（平均分 2.526）

第 2 题. 平面上的 4027 个点称为是一个*哥伦比亚式点集*, 如果其中任意三点不共线, 且有 2013 个点是红色的, 2014 个点是蓝色的. 在平面上画出一组直线, 可以将平面分成若干区域. 如果一组直线对于一个哥伦比亚式点集满足下述两个条件, 我们就称这是一个*好直线组*:

- 这些直线不经过该哥伦比亚式点集中的任何一个点;
- 每个区域中都不会同时出现两种颜色的点.

求 k 的最小值, 使得对于任意的哥伦比亚式点集, 都存在由 k 条直线构成的好直线组.

五十一、2007 年第 2 题（平均分 2.519）

问题 2. 设 A,B,C,D,E 五点中, $ABCD$ 是一个平行四边形, $BCED$ 是一个圆内接四边形. 设 ℓ 是通过 A 的一条直线, ℓ 与线段 DC 交于点 F (F 是线段DC 的内点), 且 ℓ 与直线 BC 交于点 G. 若 $EF=EG=EC$, 求证: ℓ 是 $\angle DAB$ 的角平分线.

五十二、2009 年第 5 题（平均分 2.474）

5. 求所有从正整数集到正整数集上的满足如下条件的函数 f：对所有正整数 a 和 b，都存在一个以

$$a,\ f(b)\ \text{和}\ f(b+f(a)-1)$$

为三边长的非退化三角形.

（称一个三角形为非退化三角形是指它的三个顶点不共线.）

五十三、2013 年第 5 题（平均分 2.452）

第 5 题. 记 $\mathbb{Q}_{>0}$ 是所有正有理数组成的集合. 设函数 $f\colon \mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{R}$ 满足如下三个条件:

(i) 对所有的 $x,y\in\mathbb{Q}_{>0}$, 都有 $f(x)f(y)\geq f(xy)$;

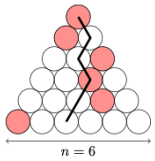
(ii) 对所有的 $x,y\in\mathbb{Q}_{>0}$, 都有 $f(x+y)\geq f(x)+f(y)$;

(iii) 存在有理数 $a>1$, 使得 $f(a)=a$.

证明: 对所有的 $x\in\mathbb{Q}_{>0}$, 都有 $f(x)=x$.

五十四、2023 年第 5 题（平均分 2.417）

第 5 题. 设 n 是一个正整数. 日式三角是将 $1+2+\cdots+n$ 个圆排成正三角形的形状, 使得对 $i=1,2,\ldots,n$, 从上到下的第 i 行恰有 i 个圆且其中恰有一个被染为红色. 在日式三角内, 忍者路径是指一串由 n 个圆组成的序列, 从最上面一行的圆开始, 每次从当前圆连接到它下方相邻的两个圆之一, 直至到达最下面一行的某个圆为止. 下图为一个 $n=6$ 的日式三角, 其中画有一条包含两个红色圆的忍者路径.



求最大的整数 k (用 n 表示), 使得在每个日式三角中都存在一条忍者路径, 它包含至少 k 个红色圆.

五十五、2019 年第 2 题（平均分 2.399）

第2题. 在三角形ABC中, 点A_1在边BC上, 点B_1在边AC上. 点P和Q分别在线段AA_1和BB_1上, 且满足PQ平行于AB. 在直线PB_1上取点P_1, 使得点B_1严格位于点P与点P_1之间, 并且$\angle PP_1C=\angle BAC$. 类似地, 在直线QA_1上取点Q_1, 使得点A_1严格位于点Q与点Q_1之间, 并且$\angle CQ_1Q=\angle CBA$.

证明: 点P, Q, P_1, Q_1共圆.

五十六、2017 年第 2 题（平均分 2.304）

第 2 题. 设 $\mathbb{R}$ 是全体实数构成的集合. 求所有的函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对于任意实数 x 和 y, 都有

$$f\left(f(x)f(y)\right)+f(x+y)=f(xy).$$

五十七、2020 年第 2 题（平均分 2.248）

第 2 题. 设实数 a,b,c,d 满足 $a\geq b\geq c\geq d>0$, 且 $a+b+c+d=1$. 证明:

$$(a+2b+3c+4d)\,a^a\,b^b\,c^c\,d^d<1.$$

五十八、2021 年第 5 题（平均分 2.152）

第 5 题. 两只松鼠 B 和 J 为过冬收集了 2021 枚核桃. J 将核桃依次编号为 1 到 2021, 并在它们最喜欢的树周围挖了一圈共 2021 个小坑. 第二天早上, J 发现 B 已经在每个小坑里放入了一枚核桃, 但并未注意编号. 不开心的 J 决定用 2021 次操作来改变这些核桃的位置. 在第 k 次操作中, J 把与第 k 号核桃相邻的两枚核桃交换位置. 证明: 存在某个 k, 使得在第 k 次操作中, J 交换了两枚编号为 a 和 b 的核桃, 且 $a<k<b$.

五十九、2008 年第 5 题（平均分 2.077）

5. 设 n 和 k 是正整数，$k\geq n$，且 $k-n$ 是一个偶数. $2n$ 盏灯依次编号为 1，2，…，$2n$，每一盏灯可以“开”和“关”. 开始时，所有的灯都是“关”的. 对这些灯可进行操作，每一次操作只改变其中的一盏灯的开关状态（即“开”变成“关”，“关”变成“开”），我们考虑长度为 k 的操作序列，序列中的第 i 项就是第 i 次操作时被改变开关状态的那盏灯的编号.

设 N 是 k 次操作后使得灯 1，…，n 是“开”的，灯 $n+1$，…，$2n$ 是“关”的状态的所有不同的操作序列的个数.

设 M 是 k 次操作后使得灯 1，…，n 是“开”的，灯 $n+1$，…，$2n$ 是“关”的，但是灯 $n+1$，…，$2n$ 始终没有被开过的所有不同的操作序列的个数.

求比值 $\dfrac{N}{M}$.

六十、2016 年第 2 题（平均分 2.033）

第 2 题. 确定所有正整数n, 使得可在一张$n \times n$方格表的每一小方格中填入字母I, M, O之一, 满足下列条件:

- 在每一行及每一列中, 恰有三分之一的小方格填入字母I, 三分之一的小方格填入字母M, 三分之一的小方格填入字母O; 并且
- 在每条对角线上, 若该对角线上的小方格个数是三的倍数, 则恰有三分之一的小方格填入字母I, 三分之一的小方格填入字母M, 三分之一的小方格填入字母O.

注: 一张$n \times n$方格表的行与列按自然的顺序标记为1至n. 由此每个小方格对应于一个正整数对(i, j), 其中$1 \leq i, j \leq n$. 对$n > 1$, 这张方格表有两类共计$4n - 2$条对角线. 一条第一类对角线是由$i + j$是某个常数的所有小方格(i, j)构成, 一条第二类对角线是由$i - j$是某个常数的所有小方格(i, j) 构成.

六十一、2007 年第 5 题（平均分 1.898）

问题 5. 设 a 与 b 为正整数. 已知 $4ab-1$ 整除 $(4a^2-1)^2$, 证明: $a=b$.

六十二、2006 年第 2 题（平均分 1.833）

二、 设 P 为正 2006 边形. 如果 P 的一条对角线的两端将 P 的边界分成两部分，每部分都包含 P 的奇数条边，那么该对角线称为“好边”. 规定 P 的每条边均为“好边”.

已知 2003 条在 P 内部不相交的对角线将 P 分割成若干三角形. 试问在这种分割之下，最多有多少个有两条“好边”的等腰三角形.

六十三、2014 年第 5 题（平均分 1.709）

第 5 题. 对每一个正整数 n, 开普敦银行都发行面值为 $\frac{1}{n}$ 的硬币. 给定总额不超过 $99+\frac{1}{2}$ 的有限多个这样的硬币 (面值不必两两不同) , 证明可以把它们分为至多 100 组, 使得每一组中硬币的面值之和最多是 1.

六十四、2016 年第 5 题（平均分 1.678）

第 5 题. 在黑板上写有方程

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

其中等号两边各有2016个一次因式. 试问: 正整数k最小为何值时, 可以在等号两边擦去这4032个一次因式中的恰好k个, 使得等号每一边都至少留下一个一次因式, 且所得到的方程没有实数根?

六十五、2012 年第 5 题（平均分 1.664）

5. 已知三角形 ABC 中，$\angle BCA=90^\circ$，D 是过顶点 C 的高的垂足. 设 X 是线段 CD 内部的一点. K 是线段 AX 上一点，使得 $BK=BC$. L 是线段 BX 上一点，使得 $AL=AC$. 设 M 是 AL 与 BK 的交点.

证明: $MK=ML$.

六十六、2015 年第 5 题（平均分 1.513）

第 5 题. 设$\mathbb{R}$是全体实数的集合. 求所有的函数$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 满足对任意实数$x, y$, 都有

$$f(x+f(x+y))+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x).$$

六十七、2015 年第 2 题（平均分 1.359）

第 2 题. 确定所有三元正整数组(a, b, c), 使得

$$ab-c, \quad bc-a, \quad ca-b$$

中的每个数都是2的方幂.

(2的方幂是指形如2^n的整数, 其中n是一个非负整数.)

六十八、2023 年第 3 题（平均分 1.256）

第 3 题. 对每个整数 $k \geqslant 2$, 求所有满足下述条件的无穷正整数序列 $a_1, a_2, \ldots$: 存在一个多项式 $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, 这里 $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ 是非负整数, 使得

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

对所有整数 $n \geqslant 1$ 成立.

六十九、2006 年第 5 题（平均分 1.183）

五、设 $P(x)$ 为 n 次（$n>1$）整系数多项式，k 是一个正整数. 考虑多项式 $Q(x) = P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$，其中 P 出现 k 次. 证明：最多存在 n 个整数 t，使得 $Q(t) = t$.

七十、2011 年第 3 题（平均分 1.055）

3．设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个定义在实数集上的实值函数，满足对所有实数 x，y，都有

$$f(x+y) \leq y f(x) + f(f(x))，$$

证明：对所有实数 $x \leq 0$，有 $f(x) = 0$.

七十一、2009 年第 3 题（平均分 1.019）

3．设 $s_1, s_2, s_3\cdots$ 是一个严格递增的正整数数列，使得它的两个子数列

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \cdots \quad 和 \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \cdots$$

都是等差数列. 证明：数列 $s_1, s_2, s_3\cdots$ 本身也是一个等差数列.

七十二、2017 年第 5 题（平均分 0.969）

第 5 题. **给**定整数 $N \geqslant 2$. $N(N+1)$ 个身高两两不同的足球队员站成一排. 球队教练希望从这些球员中移走 $N(N-1)$ 人, 使得这一排上剩下的 $2N$ 名球员满足如下 N 个条件:

(1) 他们当中身高最高的两名球员之间没有别的球员,

(2) 他们当中身高第三和第四的两名球员之间没有别的球员,

⋮

(N) 他们当中身高最矮的两名球员之间没有别的球员.

证明, 这总是可以做到的.

七十三、2020 年第 3 题（平均分 0.940）

第 3 题. 有 $4n$ 枚小石子, 重量分别为 $1, 2, 3, \ldots, 4n$. 每一枚小石子都染了 n 种颜色之一, 使得每种颜色的小石子恰有四枚. 证明: 我们可以把这些小石子分成两堆, 同时满足以下两个条件:

- 两堆小石子有相同的总重量;
- 每一堆恰有每种颜色的小石子各两枚.

七十四、2010 年第 5 题（平均分 0.932）

5. 有 6 个盒子 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$，开始时每个盒子中都恰好有一枚硬币. 每次可以任意选择如下两种方式之一对它们进行操作：

方式 1：选取一个至少有一枚硬币的盒子 $B_j (1 \leq j \leq 5)$，从盒子 B_j 中取走一枚硬币，并在盒子 B_{j+1} 中加入 2 枚硬币.

方式 2：选取一个至少有一枚硬币的盒子 $B_k (1 \leq k \leq 4)$，从盒子 B_k 中取走一枚硬币，并且交换盒子 B_{k+1} (可能是空盒)与盒子 B_{k+2} (可能是空盒)中的所有硬币.

问: 是否可以进行若干次上述操作，使得盒子 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 中没有硬币，而盒子 B_6 中恰好有 $2010^{2010^{2010}}$ 枚硬币？（注： $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.）

七十五、2022 年第 3 题（平均分 0.808）

第 3 题. 令 k 为一正整数，且 S 是一个由有限多个奇素数所形成的集。证明至多只有一种方式可以将 S 中所有数字排成一个圆圈（旋转与反射视为同一种），使得任意两个相邻数字的乘积皆可以被表示成 x^2+x+k 的形式，其中 x 为某个正整数。

七十六、2016 年第 6 题（平均分 0.806）

第 6 题. 在平面上有$n \geq 2$条线段, 其中任意两条线段都交叉, 且没有三条线段相交于同一点. 杰夫在每条线段上选取一个端点并放置一只青蛙在此端点上, 青蛙面向另一个端点. 接着杰夫会拍$n-1$次手. 每当他拍一次手时, 每只青蛙都立即向前跳到它所在线段上的下一个交点. 每只青蛙自始至终不改变跳跃的方向. 杰夫的愿望是能够适当地放置青蛙, 使得在任何时刻不会有两只青蛙落在同一个交点上.

(a) 证明: 若n是奇数, 则杰夫总能实现他的愿望.

(b) 证明: 若n是偶数, 则杰夫总不能实现他的愿望.

七十七、2008 年第 3 题（平均分 0.804）

3、证明：存在无穷多个正整数 n，使得 n^2+1 有一个大于 $2n+\sqrt{2n}$ 的质因子.

七十八、2013 年第 3 题（平均分 0.786）

第 3 题. 设三角形 ABC 的顶点 A 所对的旁切圆与边 BC 相切于点 A_1. 类似地, 分别用顶点 B 和顶点 C 所对的旁切圆定义 CA 边上的点 B_1 和 AB 边上的点 C_1. 假设三角形 $A_1B_1C_1$ 的外接圆圆心在三角形 ABC 的外接圆上. 证明：三角形 ABC 是直角三角形.

三角形 ABC 的顶点 A 所对的旁切圆是指与边 BC 相切，并且与边 AB, AC 的延长线相切的圆. 顶点 B，C 所对的旁切圆可类似定义.

七十九、2022 年第 6 题（平均分 0.683）

第 6 题. 令 n 为一正整数。一个「北欧方阵」是一个包含 1 至 n^2 所有整数的 $n \times n$ 方格表，使得每个方格内恰有一个数字。两个相异方格是相邻的如果他们有公共边。一个方格被称为「山谷」，若其内的数字比所有相邻方格内的数字都小。一条「上坡路径」是一个包含一或多个方格的序列，满足：

(i) 序列的第一个方格是山谷，

(ii) 序列中随后的每个方格都和其前一个方格相邻，且

(iii) 序列中方格内所写的数字递增。

试求一个北欧方阵中上坡路径数量的最小可能值，以 n 的函数表示之。

八十、2006 年第 3 题（平均分 0.659）

三、 求最小的实数 M， 使得对所有的实数 a, b 和 c， 有

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2.$$

八十一、2011 年第 2 题（平均分 0.654）

2. 设 S 是平面上包含至少两个点的一个有限点集，其中没有三点在同一条直线上.

所谓一个“风车”是指这样一个过程：从经过 S 中单独一点 P 的一条直线 ℓ 开始，以 P 为旋转中心顺时针旋转，直至首次遇到 S 中的另一点，记为点 Q. 接着这条直线以 Q 为新的旋转中心顺时针旋转，直到再次遇到 S 中的某一点，这样的过程无限持续下去.

证明：可以适当选取 S 中的一点 P，以及过 P 的一条直线 ℓ，使得由此产生的“风车”将 S 中的每一点都无限多次用作旋转中心.

八十二、2015 年第 3 题（平均分 0.653）

第 3 题. 在锐角三角形ABC中, $AB > AC$. 设Γ是它的外接圆, H是它的垂心, F是由顶点A处所引高的垂足. M是边BC的中点. Q是Γ上一点, 使得$\angle HQA = 90°$, K是Γ上一点, 使得$\angle HKQ = 90°$. 已知点A, B, C, K, Q互不相同, 且按此顺序排列在Γ上.

证明: 三角形KQH的外接圆和三角形FKM的外接圆相切.

八十三、2018 年第 6 题（平均分 0.638）

第6题. 在凸四边形$ABCD$中, $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. 点$X$在四边形$ABCD$内部, 且满足

$$\angle XAB = \angle XCD, \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

证明: $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

八十四、2019 年第 3 题（平均分 0.572）

第3题. 一个社交网络上有2019个用户, 某些用户之间是朋友关系. 只要用户A是用户B的朋友, 则用户B也是用户A的朋友. 如下形式的操作可反复进行, 每一时刻只进行一个操作:

> 三个用户A, B和C, 满足A与B, C都是朋友, 但B和C不是朋友, 则同时改变他们之间的朋友关系, 即B和C变为朋友, 但A与B不再是朋友, A与C也不再是朋友. 所有其他的朋友关系不改变.

已知最初时有1010个用户每人拥有1009个朋友, 有1009个用户每人拥有1010个朋友. 证明: 存在一个操作序列, 使得操作结束后, 每个用户至多只有一个朋友.

八十五、2014 年第 3 题（平均分 0.505）

第 3 题. 在凸四边形 $ABCD$ 中 $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. 点 H 是 A 向 BD 引的垂线的垂足. 点 S 和点 T 分别在边 AB 和边 AD 上, 使得 H 在三角形 SCT 内部, 且

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

证明: 直线 BD 和三角形 TSH 的外接圆相切.

八十六、2021 年第 6 题（平均分 0.481）

第 6 题. 设整数 $m \geqslant 2$. 设集合 A 由有限个整数 (不一定为正) 构成, 且 $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ 是 A 的子集. 假设对任意 $k = 1, 2, \ldots, m$, B_k 中所有元素之和为 m^k. 证明: A 包含至少 $m/2$ 个元素.

八十七、2010 年第 3 题（平均分 0.465）

3. 设$\mathbb{N}$是所有正整数构成的集合. 求所有的函数 $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对所有 $m, n \in \mathbb{N}$，

$$\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big)$$

是一个完全平方数.

八十八、2012 年第 3 题（平均分 0.413）

3. “欺诈猜数游戏”在两个玩家甲和乙之间进行， 游戏依赖于两个甲和乙都知道的正整数 k 和 n.

游戏开始时甲先选定两个整数 x 和 N，$1 \le x \le N$. 甲如实告诉乙 N 的值，但对 x 守口如瓶. 乙现在试图通过如下方式的提问来获得关于 x 的信息: 每次提问，乙任选一个由若干正整数组成的集合 S（可以重复使用之前提问中使用过的集合），问甲“x 是否属于 S?”. 乙可以提任意数量的问题. 在乙每次提问之后，甲必须对乙的提问立刻回答“是”或“否”，甲可以说谎话，并且说谎的次数没有限制，唯一的限制是甲在任意连续 $k+1$ 次回答中至少有一次回答是真话.

在乙问完所有想问的问题之后，乙必须指出一个至多包含 n 个正整数的集合 X，若 x 属于 X，则乙获胜；否则甲获胜. 证明：

（1）若 $n \ge 2^k$，则乙可保证获胜；

（2）对所有充分大的整数 k，存在整数 $n \ge 1.99^k$，使得乙无法保证获胜.

八十九、2019 年第 6 题（平均分 0.403）

第6题. 在锐角三角形ABC中, I是内心, $AB \neq AC$. 三角形ABC的内切圆ω与边BC, CA和AB分别相切于点D, E和F. 过点D且垂直于EF的直线与ω的另一点交点为R. 直线AR与ω的另一交点为P. 三角形PCE和三角形PBF的外接圆交于另一点Q.

证明: 直线DI和PQ的交点在过点A且垂直于AI的直线上.

九十、2021 年第 2 题（平均分 0.375）

第 2 题. 对任意实数 $x_1, \ldots, x_n$, 证明下述不等式成立:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}.$$

九十一、2021 年第 3 题（平均分 0.372）

第 3 题. 设 D 是锐角三角形 ABC $(AB > AC)$ 内部一点, 使得 $\angle DAB = \angle CAD$. 线段 AC 上的点 E 满足 $\angle ADE = \angle BCD$, 线段 AB 上的点 F 满足 $\angle FDA = \angle DBC$, 且直线 AC 上的点 X 满足 $CX = BX$. 设 O_1 和 O_2 分别为三角形 ADC 和三角形 EXD 的外心. 证明: 直线 BC, EF 和 O_1O_2 共点.

九十二、2010 年第 6 题（平均分 0.368）

6. 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是一个正实数数列．假设存在某个固定的正整数 s，使得对所有的 $n > s$，有

$$a_n = \max\left\{a_k + a_{n-k} \,\middle|\, 1 \le k \le n-1\right\}.$$

证明: 存在正整数 l 和 N，$l \le s$，使得对所有的 $n \ge N$ 都有 $a_n = a_l + a_{n-l}$.

九十三、2015 年第 6 题（平均分 0.355）

第 6 题. 整数序列 $a_1, a_2, \cdots$ 满足下列条件:

(i) 对每个整数 $j \geqslant 1$, 有 $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$;

(ii) 对任意整数 $1 \leqslant k < \ell$, 有 $k + a_k \neq \ell + a_\ell$.

证明: 存在两个正整数 b 和 N, 使得

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

对所有满足 $n > m \geqslant N$ 的整数 m 和 n 均成立.

九十四、2014 年第 6 题（平均分 0.339）

第 6 题. 平面上的一族直线被称为是 *处于一般位置* 的, 如果其中没有两条直线平行, 没有三条直线共点. 一族处于一般位置的直线把平面分割成若干区域, 我们把其中面积有限的区域称为这族直线的 *有限区域*. 证明: 对于充分大的 n 和任意处于一般位置的 n 条直线, 我们都可以把其中至少 $\sqrt{n}$ 条直线染成蓝色, 使得每一个有限区域的边界都不全是蓝色的.

注: 如果你的答卷上证明的是 $c\sqrt{n}$(而不是 $\sqrt{n}$) 的情形, 那么将会根据常数 c 的值给分.

九十五、2012 年第 6 题（平均分 0.336）

6. 求所有的正整数 n，使得存在非负整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，满足

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

九十六、2011 年第 6 题（平均分 0.318）

6. 设锐角三角形 ABC 的外接圆为 Γ，ℓ 是圆 Γ 的一条切线．记切线 ℓ 关于直线 BC，CA 和 AB 的对称直线分别为 ℓ_a，ℓ_b 和 ℓ_c．证明：由直线 ℓ_a，ℓ_b 和 ℓ_c 构成的三角形的外接圆与圆 Γ 相切.

九十七、2007 年第 3 题（平均分 0.304）

问题 3. 在一次数学竞赛活动中, 有一些参赛选手是朋友. 朋友关系是相互的. 如果一群参赛选手中的任何两人都是朋友, 我们就称这一群选手为一个“团” (特别地, 人数少于 2 的一群也是一个团).

已知在这次竞赛中, 最大的团(人数最多的团) 的人数是一个偶数, 证明: 我们总能把参赛选手分配到两个教室, 使得一个教室中的最大团的人数等于另一个教室中的最大团的人数.

九十八、2013 年第 6 题（平均分 0.296）

第 6 题. 设整数 $n \geq 3$, 在圆周上有 $n+1$ 个等分点. 用数 $0, 1, \ldots, n$ 标记这些点, 每个数字恰好用一次. 考虑所有可能的标记方式; 如果一种标记方式可以由另一种标记方式通过圆的旋转得到, 那么认为这两种标记方式是同一个. 一种标记方式称为是 *漂亮的*, 如果对于任意满足 $a+d=b+c$ 的四个标记数 $a<b<c<d$, 连接标 a 和 d 的点的弦与连接标 b 和 c 的点的弦都不相交.

设 M 是漂亮的标记方式的总数, 又设 N 是满足 $x+y \leq n$, 且 $\gcd(x,y)=1$ 的有序正整数对 (x,y) 的个数. 证明:

$$M = N+1.$$

九十九、2017 年第 6 题（平均分 0.294）

第 6 题. 一个*本原格点*是一个有序整数对 (x,y), 其中 x 和 y 的最大公约数是 1. 给定一个有限的本原格点集 S, 证明, 存在一个正整数 n 和整数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$, 使得对于 S 中的每一个 (x,y), 都成立:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 1.$$

一百、2020 年第 6 题（平均分 0.282）

第 6 题. 证明: 存在正常数 c 具有如下性质:

对任意整数 $n>1$, 以及平面上 n 个点的集合 $\mathcal{S}$, 若 $\mathcal{S}$ 中任意两点之间的距离不小于 1，则存在一条分离 $\mathcal{S}$ 的直线 ℓ, 使得 $\mathcal{S}$ 中的每个点到直线 ℓ 的距离不小于 $cn^{-1/3}$.

(我们称直线 ℓ *分离* 点集 $\mathcal{S}$, 如果某条以 $\mathcal{S}$ 中两点为端点的线段与 ℓ 相交.)

注. 如果证明了比 $cn^{-1/3}$ 弱的估计 $cn^{-\alpha}$，会根据 $\alpha > 1/3$ 的值，适当给分.

一百零一、2018 年第 3 题（平均分 0.278）

第3题. 一个**反帕斯卡三角形**是由一些数排成的等边三角形数阵, 其中每个不在最后一行的数都恰好等于排在它下面的两个数的差的绝对值. 例如, 下面的数阵是一个反帕斯卡三角形, 它共有四行, 并且恰含有1至10中的每个整数.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & 4 & & & & \\ & & 2 & & 6 & & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 & \end{array}$$

试问: 是否存在一个共有2018行的反帕斯卡三角形, 恰含有1至$1+2+\cdots+2018$中的每个整数?

一百零二、2023 年第 6 题（平均分 0.275）

第 6 题. 设 ABC 是一个正三角形. 点 A_1, B_1, C_1 在三角形 ABC 的内部, 且满足 $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, 及

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

设直线 BC_1 与 CB_1 交于点 A_2, 直线 CA_1 与 AC_1 交于点 B_2, 直线 AB_1 与 BA_1 交于点 C_2.

证明: 若三角形 $A_1B_1C_1$ 的三边长度两两不等, 则三角形 AA_1A_2, BB_1B_2 和 CC_1C_2 的外接圆都经过两个公共点.

一百零三、2008 年第 6 题（平均分 0.260）

6. 在凸四边形 $ABCD$ 中，$BA \neq BC$. ω_1 和 ω_2 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 的内切圆. 假设存在一个圆 ω 与射线 BA 相切（切点不在线段 BA 上），与射线 BC 相切（切点不在线段 BC 上），且与直线 AD 和直线 CD 都相切. 证明：圆 ω_1 和 ω_2 的两条外公切线的交点在圆 ω 上.

一百零四、2016 年第 3 题（平均分 0.251）

第 3 题. 设$P = A_1A_2\cdots A_k$是平面上的一个凸多边形. 顶点$A_1, A_2, \cdots, A_k$的纵横坐标均为整数, 且都在一个圆上. P的面积记为S. 设n是一个正奇数, 满足P的每条边长度的平方是被n整除的整数.

证明: $2S$是整数, 且被n整除.

一百零五、2006 年第 6 题（平均分 0.187）

六、对于凸多边形 P 的任意边 b，以 b 为边，在 P 内部作一个面积最大的三角形. 证明: 对 P 的每条边， 按上述方法所得三角形的面积之和至少是 P 的面积的 2 倍.

一百零六、2009 年第 6 题（平均分 0.168）

6. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互不相同的正整数. M 是有 $n-1$ 个元素的正整数集，且不含数 $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 一只蚱蜢沿着实数轴从原点 0 开始向右跳跃 n 步，它的跳跃距离是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的某个排列. 证明：可以选择一种排列，使得蚱蜢跳跃落下的点所表示的数都不在集 M 中.

一百零七、2007 年第 6 题（平均分 0.152）

问题 6. 设 n 是一个正整数. 考虑

$$S = \{ (x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\},\ x + y + z > 0 \}$$

这样一个三维空间中具有 $(n+1)^3 - 1$ 个点的集合. 问: 最少要多少个平面, 它们的并集才能包含 S, 但不含 $(0, 0, 0)$.

一百零八、2017 年第 3 题（平均分 0.042）

第 3 题. 一个猎人和一只隐形的兔子在欧氏平面上玩一个游戏. 已知兔子的起始位置 A_0 和猎人的起始位置 B_0 重合. 在游戏进行 $n-1$ 回合之后, 兔子位于点 A_{n-1}, 而猎人位于点 B_{n-1}. 在第 n 个回合中, 以下三件事情依次发生.

(i) 兔子以隐形的方式移动到一点 A_n, 使得点 A_{n-1} 和点 A_n 之间的距离恰为 1.

(ii) 一个定位设备向猎人反馈一个点 P_n. 这个设备唯一能够向猎人保证的事情是, 点 P_n 和点 A_n 之间的距离至多为 1.

(iii) 猎人以可见的方式移动到一点 B_n, 使得点 B_{n-1} 和点 B_n 之间的距离恰为 1.

试问, 是否无论兔子如何移动, 也无论定位设备反馈了哪些点, 猎人总能够适当地选择她的移动方式, 使得在 10^9 回合之后, 她能够确保和兔子之间的距离至多是 100?

你猜对了吗?