数字可能只是包装：2016 年高联加试 A 卷第 1 题

2026-09-11　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5c0389ccab033905

今天是 9 月 11 日，10 年前的联赛考场上，一道带有数字 $2016 \cdot 9 \cdot 11$ 的代数题让很多考生摸不着头脑，实则这是联赛惯用的“年份题”、“日期题”讨论，详见：高联中的“日期题”盘点

以下分析和解答（由我制作的思路分析 + 排版 skill 自动生成）：

恩次方根
ENCIFANGGEN

2016 年 A 卷 P1

题目　设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$ 满足

$$9a_i > 11a_{i+1}^2, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2015.$$

求

$$(a_1 - a_2^2)(a_2 - a_3^2)\cdots(a_{2015} - a_{2016}^2)(a_{2016} - a_1^2)$$

的最大值，并给出相应的取等条件.

思路分析　条件 $9a_i > 11a_{i+1}^2$ 首先保证前 2015 个因子 $a_i - a_{i+1}^2$ 为正. 极大值若想为正，最后一个循环因子也必须为正，因此可设 $r_i = \dfrac{a_{i+1}^2}{a_i} \in (0,1)$ 并循环定义下标. 于是每个因子是 $a_i(1-r_i)$，而连乘关系给出 $\prod r_i = \prod a_i$，原目标化为 $\prod r_i(1-r_i)$. 这样原来的循环依赖不再出现，只需逐项使用 $r(1-r) \le 1/4$.

还要确认原题更强的 $r_i < 9/11$ 并不会破坏取等：最优点 $r_i = 1/2$ 正落在允许区间内，并可反解出一组循环一致的 a_i. 选取 r_i 的好处有两点：每个因子都变成 $a_i(1-r_i)$，而且 $\prod r_i = \prod a_i$ 会使所有 a_i 在总乘积中消去.

完整过程　由题设，对 $1 \le i \le 2015$ 有 $a_i > \dfrac{11}{9}a_{i+1}^2 \ge 0$，所以 $a_i > 0$ 且 $a_i - a_{i+1}^2 > 0$. 取 $a_1 = \cdots = a_{2016} = 1/2$ 时原乘积为 $4^{-2016} > 0$. 因此在最大值情形必有 $a_{2016} - a_1^2 > 0$，特别地 $a_{2016} > 0$.

循环约定 $a_{2017} = a_1$，令 $r_i = \dfrac{a_{i+1}^2}{a_i}$，　$i = 1, \ldots, 2016$. 则 $0 < r_i < 1$，且

$$\prod_{i=1}^{2016} r_i = \frac{\prod a_{i+1}^2}{\prod a_i} = \prod_{i=1}^{2016} a_i.$$

因此原乘积为

$$\prod_{i=1}^{2016} a_i(1-r_i) = \prod_{i=1}^{2016} r_i(1-r_i) \le \left(\frac{1}{4}\right)^{2016}.$$

等号要求所有 $r_i = 1/2$，即 $a_{i+1}^2 = \dfrac{a_i}{2}$ 循环成立. 这个循环递推的正解只能是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2016} = \dfrac{1}{2}$. 它也满足原题的严格条件. 因此最大值为 4^{-2016}，等号当且仅当 $a_1 = \cdots = a_{2016} = 1/2$.

总结　比值 $r_i = a_{i+1}^2/a_i$ 让所有 a_i 在总乘积中消失，问题化为逐项最大化 $r_i(1-r_i)$.

22