这道全国大学生数学竞赛的多项式题目，很适合作为一试题

2025-04-13 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5c4d09b547de7c73

题目：（2025 年全国大学生数学竞赛决赛（数学类）第三题）

设实系数多项式 $p(x)$ 和 $q(x)$ 分别为：

$p(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,$q(x)=x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+a_m$.

已知 $q(x)\mid p(x)$，且对某个 k 有 $|b_k|>2025^k\mathrm{C}_m^k$，其中 C_m^k 为组合数．证明：存在 $1\le j\le n$ 使得 $|a_j|>2024$.

解答（PDF 中已展开）

证明：

设 $q(x)$ 的全体复根为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$.

由韦达定理：

$$\begin{aligned}2025^k\mathrm{C}_m^k<|b_k|&=\left|\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m}x_{i_1}\cdots x_{i_k}\right|\\&\le\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m}|x_{i_1}|\cdots|x_{i_k}|\end{aligned}$$

由平均值原理：存在 $1\le k\le m$，使得 $t=|x_k|>2025$.

由 $q(x)\mid p(x)$ 知，x_k 也为 $p(x)$ 的根，若 $\forall 1\le j\le n$，都有 $|a_j|\le 2024$，则

$$\begin{aligned}0=&|f(x_k)|\\=&\left|x_k^n+\sum_{i=1}^n a_ix_k^{n-i}\right|\\\ge&|x_k|^n-\sum_{i=1}^n|a_i|\cdot|x_k|^{n-i}\\\ge&t^n-2024\sum_{i=1}^n t^{n-i}\\=&t^n-2024\cdot\frac{t^n-1}{t-1}\\=&\frac{1}{t-1}\left(t^n(t-2025)+2024\right)\\>&0\end{aligned}$$

矛盾！故原命题成立.