1997 年保加利亚不等式

2021-04-01 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5c8221dc15e3fa2a

昨天的文章发出后，有位同学发了这道 1997 年保加利亚的不等式（阅读原文可进入 AoPS 题目讨论）给我，可以看作是 2000 年澳门数学奥林匹克中不等式的加强.

设正实数 a,b,c 满足 $abc=1$，求证：

$$\sum_{cyc}\frac{1}{1+a+b}\leq\sum_{cyc}\frac{1}{2+a}.$$

分析：不等式左侧与 2000 年澳门数学奥林匹克的一致，而由 $abc=1$ 易证不等式右侧不大于 1（去分母之后用均值就可以了），故本题比 2000 年澳门数学奥林匹克的不等式更强.
有了昨天两道不等式的解题经验，这道题处理起来倒是比较简单，主要思路是寻找另一个结构的循环和来进行“中和”. 在经过一番尝试后，有了下面的证法.

证明: 注意到

$$\begin{aligned}&\frac{2}{2+a}-\frac{1}{a+b+1}-\frac{b}{ab+b+1}\\=&\frac{a(b-1)^2}{(2+a)(a+b+1)(ab+b+1)}\\\geq&0.\end{aligned}$$

以及

$$\sum_{cyc}\frac{b}{ab+b+1}=1\geq\sum_{cyc}\frac{1}{2+a}.$$

有

$$\begin{aligned}&\sum_{cyc}\frac{2}{2+a}\\\geq&\sum_{cyc}\frac{1}{a+b+1}+\sum_{cyc}\frac{b}{ab+b+1}\\\geq&\sum_{cyc}\frac{1}{a+b+1}+\sum_{cyc}\frac{1}{2+a}.\end{aligned}$$

即

$$\sum_{cyc}\frac{1}{1+a+b}\leq\sum_{cyc}\frac{1}{2+a}.$$

证毕.

下面附上一个暴力的 pqr 代换方法（来源于 AoPS 论坛）：

证明：设 $p=a+b+c$，$q=ab+bc+ca$，则原不等式变为：

$$\frac{p^2+4p+q+3}{p^2+2p+q+pq}\leq\frac{12+4p+q}{9+4p+2q}$$

即

$$\frac{2p+3-pq}{p^2+2p+q+pq}\leq\frac{3-q}{9+4p+2q}.$$

去分母后变为：

$$3p^2q+pq^2+6pq\geq 5p^2+q^2+24p+3q+27$$

注意到 $p\geq 3$，$q\geq 3$，$p^2\geq 3y$，于是有：$\frac{5}{3}p^2q\geq 5p^2$，$\frac{pq^2}{3}\geq q^2$，$pq^2\geq 9p$，$5pq\geq 15p$，$pq\geq 3q$，$p^2q\geq 27$，相加即证.