2021 年第一届 OIMC 模拟赛

2021-12-27 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5c840ddefd1d3940

OIMC(Online International Mathematical Cup) 是一个形式与 IMO 相同的在线数学奥林匹克模拟赛，第一届于 2021 年八月举办.

第一天

1. 设 ℓ_1，ℓ_2，$\cdots$，ℓ_k 为平面上 k 条互相平行的直线. $\mathcal{P}$ 为由这些直线上的若干个点组成的集合，每条直线 ℓ_i 上至少有两个点. 已知对 $\mathcal{P}$ 中任意不共线的三点 A，B，C（其中任意两点不在同一条 ℓ_i 上），存在点 $P\in\mathcal{P}$，使得 P 在 $\triangle ABC$ 的边界上. 求证：$\mathcal{P}$ 为无限集.

2. 设素数 $p>3$，正整数 m 满足 $p\mid m^2-m+1$. 设 $P(x)=\sum\limits_{i=1}^{p-1}\dfrac{x^i}{i}$，求证：$p$ 整除既约分数 $P(m)$ 的分子.

3. 已知 $ABCDEFG$ 为正七边形，$\mathcal{P}$ 为一条同时与 AB，CD，DE，EF 相切的抛物线. 求证：EF 与 $\mathcal{P}$ 的切点在直线 AD 上.

第二天

1. 求所有函数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，满足对任意实数 x，y，都有
$$f(x+y)f(x+f(y))=x^2+f(y^2).$$

2. 设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，AH 和 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 H_A. 点 A' 为点 A 关于 BC 的对称点. 点 H_B 和 H_C 分别为点 H 在直线 $A'B$ 和 $A'C$ 上的射影. 设 T 为直线 BH_C 和直线 CH_B 的交点. 求证：TH_A 和 $\triangle ABC$ 的外接圆相切.

3. 设正整数 $n\geq 2$，在一个面积为 1 的桌面上，有 $2n$ 块形状任意的纸片. 这些纸片的面积之和为 n，且所有的纸片都完全在桌面的内部. 求证：必存在两块纸片的重叠部分面积至少为 $\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.