一道整除问题的组合意义证法——2009 年罗马尼亚大师杯第 1 题

2026-08-18　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5d01d0a0ac31caa3

2009 年罗马尼亚大师杯第 1 题

对正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，记

$n = \sum_{i=1}^{k} a_i$，　$\binom{n}{a_1, \cdots, a_k} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} (a_i!)}$.

令 d 是 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的最大公约数，求证：$\frac{d}{n}\binom{n}{a_1, \cdots, a_k}$ 是整数.

分析

本题比较自然的方法是计算幂次进行比较，也可以用 Kummer 定理进行理解.

更巧妙的方法则是用 Bézout 定理表示最大公约数，再使用组合恒等式化简.

注意到 $\binom{n}{a_1, \cdots, a_k}$ 表示可重排列，而除以 n 往往是圆排列中进行的操作，于是可以想到对可重圆排列进行计数，从而给出一个组合意义的证明.

证明

设 X 为所有含 a_i 个 i（$1 \le i \le k$）的长度为 n 的排列集合，则

$|X| = \binom{n}{a_1, \cdots, a_k}$.

按循环旋转将 X 分成若干等价类. 任取一个排列，设它的最小正周期为 t，则其所在等价类的大小也为 t.

由于该排列由 $\frac{n}{t}$ 个相同的块重复组成，所以每个 a_i 都能被 $\frac{n}{t}$ 整除.

而 d 是 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的最大公约数，因此 $\frac{n}{t} \mid d$，从而 $\frac{n}{d} \mid t$.

将所有等价类大小相加，得到 $\binom{n}{a_1, \cdots, a_k}$. 因此

$\frac{n}{d} \mid \binom{n}{a_1, \cdots, a_k}$.

即 $\frac{d}{n}\binom{n}{a_1, \cdots, a_k}$ 是整数.