关于 Catalan 数的组合恒等式（2024 年 CTST 第二轮第 1 题）

2024-03-27　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5d51866b89d06376

题目：

对自然数 n，记

$$C_n=\frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

是卡塔兰数. 求证：对任意自然数 m，均有

$$\sum_{\substack{i+j+k=m\\ i,j,k\in\mathbb{N}}} C_{i+j}C_{j+k}C_{k+i}=\frac{3}{2m+3}C_{2m+1}.$$

前置知识：

卡塔兰（Catalan）数有非常丰富的性质，在组合计数问题中频繁出现。这里我们只需要知道它的如下性质：

1. 通项公式：

$$C_n=\frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

2. 递推公式：

$$C_n=\sum_{k=0}^{n-1}C_kC_{n-k-1}$$

3. 母函数：

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k+1}(-4x)^k$$

4. 组合意义：从原点 $(0,0)$ 出发，每次向 x 轴或 y 轴正方向移动 1 个单位，到达点 (n,n)，在移动过程中不越过第一象限平分线的移动方法总数.

参考资料：https://oeis.org/A000108、《命题人讲座——集合与对应》第八讲　卡塔兰数

事实上，除了题中已给的通项公式外，使用另外三个性质都能比较快速地证明本题.

但使用母函数需要一定的基础，适合受过母函数训练的同学；使用组合意义则需要一定的灵感，我短时间内没有想到，数之谜上有一个很漂亮的使用组合意义的做法。

这里我们用递推公式进行证明：

解答（PDF 中已展开）

证明：

首先化简左边式子，考虑到 $C_{i+j}C_{j+k}C_{k+i}$ 形式比较复杂，先作换元：

$$x=i+j, y=j+k, z=k+i$$

求和下标的条件变为 $x+y+z=2(i+j+k)=2m$，而

$$-x+y+z, x-y+z, x+y-z, x+y+z$$

奇偶性相同，故 $i,j,k\in\mathbb{Z} \iff x,y,z\in\mathbb{Z}$.

但 $i,j,k\geq 0$，于是应有 $x,y,z\leq m$. 因此

$$\sum_{\substack{i+j+k=m\\ i,j,k\in\mathbb{N}}} C_{i+j}C_{j+k}C_{k+i}=\sum_{\substack{x+y+z=2m\\ 0\leq x,y,z\leq m}} C_xC_yC_z$$

若没有 $x,y,z\leq m$ 这一条件，$\sum\limits_{x+y+z=2m} C_xC_yC_z$ 比较好计算，可以固定 z，将 y 改为 $(2m-z)-x$，这样对 $C_xC_{(2m-z)-x}$ 的求和可以利用 Catalan 数的递推公式进行化简，如下：

$$\begin{aligned}
&\sum_{x+y+z=2m} C_xC_yC_z\\
=&\sum_{z=0}^{2m}\left(C_z\cdot\sum_{x=0}^{2m}C_xC_{(2m-z)-x}\right)\\
=&\sum_{z=0}^{2m}C_z\cdot C_{2m+1-z}\\
=&\sum_{z=0}^{2m+1}C_z\cdot C_{2m+1-z}-C_{2m+1}C_0\\
=&C_{2m+2}-C_{2m+1}
\end{aligned}$$

接下来减去不满足 $x,y,z\leq m$ 条件的即可，考虑 $z\geq m+1$ 的情况，依然固定 z：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{x+y+z=2m\\ z\geq m+1}} C_xC_yC_z\\
=&\sum_{z=m+1}^{2m}\left(C_z\cdot\sum_{x=0}^{m-1}C_xC_{(2m-z)-x}\right)\\
=&\sum_{z=m+1}^{2m}C_zC_{2m+1-z}
\end{aligned}$$

注意到 C_zC_{2m+1-z} 是对称的，上式补上最后一项 $C_{2m+1}C_0$，再乘 2，即可将求和索引改为 z 从 0 到 $2m+1$. 于是

$$\begin{aligned}&\sum_{z=m+1}^{2m} C_zC_{2m+1-z}\\=&\frac{1}{2}\sum_{z=0}^{2m+1} C_zC_{2m+1-z}-C_{2m+1}C_0\\=&\frac{1}{2}C_{2m+2}-C_{2m+1}\end{aligned}$$

再分别考虑 $x,y\geq m+1$ 的情况，并注意到它们不可能同时发生，于是

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{x+y+z=2m\\0\leq x,y,z\leq m}} C_xC_yC_z\\=&\sum_{x+y+z=2m} C_xC_yC_z-3\sum_{\substack{x+y+z=2m\\z\geq m+1}} C_xC_yC_z\\=&(C_{2m+2}-C_{2m+1})-3\left(\frac{1}{2}C_{2m+2}-C_{2m+1}\right)\\=&2C_{2m+1}-\frac{1}{2}C_{2m+2}\end{aligned}$$

只需证明：

$$\begin{aligned}&2C_{2m+1}-\frac{1}{2}C_{2m+2}=\frac{3}{2m+3}C_{2m+1}\\\Longleftrightarrow\ &C_{2m+2}=\frac{8m+6}{2m+3}C_{2m+1}\end{aligned}$$

这由通项公式是显然的，于是我们完成了本题的证明.

一年一度全球数学爱好者的盛会，就差你了！

