2025 年尼泊尔 IMO 国家队选拔考试

2025-04-25 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5dec4c4ba3848722

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2025 年尼泊尔 IMO 国家队选拔考试

程国根 译

第一天

1. 给定 $\triangle ABC$，点 X 为边 BC 上一动点. 过点 X 作 AB 的垂线，交 $\triangle AXC$ 的外接圆于点 P；过 X 作 AC 的垂线，交 $\triangle AXB$ 的外接圆于点 Q. 求证：直线 PQ 过定点.

2. 求所有正整数 n，使得若 $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{k-1} < d_k = n$ 为 n 的全体正约数，则存在 $d_2 - d_1, d_3 - d_2, \cdots, d_k - d_{k-1}$ 的某个排列，其构成等差数列.

3. 求所有函数 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，使得对任意正实数 x, y，都有

$$f(f(x)) + xf(xy) = x + f(y).$$

第二天

4. 定义数列 $\{a_n\}$ 如下：$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{\sqrt[2024]{a_n}}$，$n\in\mathbb{N}_+$. 求证：对任意整数 $n\geq 2$，都有 $a_n^{2025}>n^{2024}$.

5. Kritesh 负责管理一个停车场，停车场形状为由 2025 个单位正方形组成的 45×45 方格区域。在每个单位正方形中都有一辆汽车，汽车的朝向为向上、向下、向左或向右。如果一辆汽车正前方的方格为空，那么它就可以选择向前移动。每辆汽车都希望驶出这个 45×45 的方格区域。
Kritesh 意识到，并非总是能让所有汽车都离开这个方格区域。因此，在这个过程开始之前，他将从这个 45×45 的方格区域中移走 k 辆汽车，使得所有剩余的汽车最终都能够驶出这个方格区域。求 k 的最小值，使得 Kritesh 能够确保完成这项工作。

6. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，O 为外心，D 为 A 在 BC 上的射影，E 为 B 在 CA 上的射影．D_1,D_2 分别为点 D 关于直线 AB,AC 的对称点，Γ 为 $\triangle AD_1D_2$ 的外接圆．直线 D_1B 与 Γ 再次交于点 P，射线 EB 与 Γ 交于点 Q．求证：O,D,Q 三点共线当且仅当 B,C,Q,P 四点共圆．