Mathematical Reflections 2023 年第六期征解题

2023-11-28 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5ef7c96b849f47f1

本文为图片版：正文为 4 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

Mathematical Reflections 2023 年第六期征解题

Junior Problems

程国根 译

J643. 求所有正整数 n，使得

$$\sqrt{\binom{12n}{n+1}+1}-\sqrt{\binom{12n}{n-1}+1}=40.$$

J644. 设正实数 a,b,c 满足 $abc=1$. 求证：

$$\frac{1}{\sqrt{a+2a^4}}+\frac{1}{\sqrt{b+2b^4}}+\frac{1}{\sqrt{c+2c^4}}\geq\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

J645. 设圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 O. 点 P 在直线 BD 上，满足 $\measuredangle PAD=\measuredangle CAD$，且 $BP^2=4OC(AO+AP)$. 求证：O 为线段 BP 的中点.

J646. 正整数 a,b 满足 $\gcd(a,b)=1$. 求证：$\gcd(a^2+b^2,a^3+b^3)\in\{1,2\}$.

J647. 正实数 a,b,c,p,q,r 满足 $q+r\geq 2p$，$a+b+c=p+q+r$. 求证：

$$\frac{a}{\sqrt{pa+qb+rc}}+\frac{b}{\sqrt{pb+qc+ra}}+\frac{c}{\sqrt{pc+qa+rb}}\geq\sqrt{3}.$$

J648. 正实数 a,b,c 满足 $ab+bc+ca=1$. 求证：

$$a+b+c+3abc\geq\frac{4}{a+b+c}.$$

并说明等号何时成立.

Mathematical Reflections 2023 年第六期征解题

Senior Problems

程国根　译

S643. 设 $n \geq 2$，实系数多项式 $P(x) = x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n+1}$ 满足

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = \frac{3(3^{2n} - 1)}{2}.$$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n+1}$ 为 $P(x)$ 的所有根，且满足

$$(x_1 - 1)(x_2 + 1)(x_3 - 1)(x_4 + 1) \cdots (x_{2n+1} - 1) = 3^n$$

$$(x_1 + 1)(x_2 - 1)(x_3 + 1)(x_4 - 1) \cdots (x_{2n+1} + 1) = 3^{n+1}$$

求 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}$ 的值．并给出一个多项式 $P(x)$ 的构造．

S644. 设 $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq 0$ 满足 $ab + bc + cd + de + ea = 5$．求证：

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 5(a + b + c + d + e) \geq 30.$$

S645. $\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c，内切圆半径 r，外接圆半径 R，面积 K．A', B', C' 分别为内切圆在 BC, CA, AB 上的切点．

(1) 求证：长度为 $a \cdot AA'$，$b \cdot BB'$，$c \cdot CC'$ 的三条线段能构成一个三角形 Δ．

(2) 设 Δ 的面积为 K'，求证：$9r^2 \leq \dfrac{K'}{K} \leq \dfrac{9}{4}R^2$．

S646. 正实数 a, b, c 满足 $ab + bc + ca = 2(a + b + c)$．求证：

$$\frac{a}{b^2 + 4} + \frac{b}{c^2 + 4} + \frac{c}{a^2 + 4} \geq \frac{3}{4}.$$

S647. 设锐角三角形 ABC 的外接圆为 Γ．Γ 在点 B 和点 C 处的切线交于点 X，AX 和 Γ 再次交于点 Y．设 M 为 BC 中点，过 A 作 BC 的垂线和 YM 交于点 D．求证：$\triangle ABC \cong \triangle DBC$．

S648. 非负实数 a, b, c, d 满足 $a + b + c + d = 4$．求证：

$$\frac{a}{a^2 + 4} + \frac{b}{b^2 + 4} + \frac{c}{c^2 + 4} + \frac{d}{d^2 + 4} \leq \frac{1}{5} + \frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{10}.$$

并说明等号何时成立．

Mathematical Reflections 2023 年第六期征解题

Undergraduate Problems

程国根　译

U643. 数列 $\{x_n\}_{n\geq 2}$ 定义如下：$x_n=\dfrac{\sqrt[n]{e}-1}{\sqrt[n^2]{e}-1}-n$．求 $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n-\dfrac{1}{2})$．

U644. 设 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 三阶可导，且满足 $f(-1)=f(1)=f''(-1)=0$．求证：

$$\left(\int_{-1}^{1} f(x)dx\right)^2 \leq \frac{104}{315}\int_{-1}^{1}\left(f'''(x)\right)^2 dx.$$

U645. 求所有非零的实系数多项式 $P(x),Q(x)$，使得对任意实数 x，都有

$$P((Q(x))^3)=x^2P(x)(Q(x))^2.$$

U646. 设 $f:[0,1]\to[0,1)$ 可积．求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)^n dx=0$

U647. 设 $\{p_k\}_{k\geq 1}$ 为素数列，$q_n=\prod\limits_{k\leq n} p_k$．计算：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{p|q_n}(\log p)^{\alpha}}{\omega\left(q_n\right)^{1-\alpha}\left(\log q_n\right)^{\alpha}}$$

其中 $\alpha\in(0,1)$，$\omega(n)$ 表示正整数 n 的不同素因子个数．

U648. 数列 T_n 定义如下：$T_1=a$，$T_{n+1}=\dfrac{T_n^2}{2\sqrt{1+T_n^2}}$，$n\geq 1$．计算：

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{T_n^2+2}{2T_n^2+2}.$$

Mathematical Reflections 2023 年第六期征解题

Olympiad Problems

程国根　译

O643. 正实数 a,b,c,λ 满足 $\dfrac{1}{a+\lambda}+\dfrac{1}{b+\lambda}+\dfrac{1}{c+\lambda}\le\dfrac{1}{\lambda}$. 求证:

$$a+b+c+\frac{15abc}{ab+bc+ca}\ge 16\lambda.$$

O644. 设 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_9\ge 0$，求证：使得不等式

$$\left(\frac{ka_1+a_2+\cdots+a_9}{k+8}\right)^2\ge\frac{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_9a_1}{9}$$

成立的最佳常数 $k=4$.

O645. 求所有完全积性函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对任意正整数 a,b,c，都有

$$f(a^2+b^2+c^2)=f(ab+bc+ca-2).$$

O646. 非零实数 x,y,z 满足 $x+y+z=xyz$. 求证:

$$\left|x+y+z-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right|\ge 2\sqrt{3}.$$

O647. 非负实数 a,b,c 满足 $a+b+c=3$. 求证:

$$\frac{a}{a^2+3}+\frac{b}{b^2+3}+\frac{c}{c^2+3}\le\frac{1}{4}+\frac{ab+bc+ca}{6}.$$

并说明等号何时成立.

O648. 设整系数多项式 $A(x),B(x)$ 满足：存在整系数多项式 $P_1(x),Q_1(x)$，使得

$$P_1(x)A(x)+Q_1(x)B(x)=1.$$

求证：对任意正整数 n，存在多项式 $P_n(x),Q_n(x)$，使得

$$P_n(x)(A(x))^n+Q_n(x)(B(x))^n=1.$$