2023 年日本 IMO 国家队选拔考试

2023-07-22 原文链接

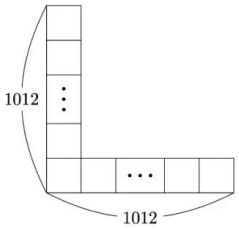
网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5f4435b0c1a65384

2023 年日本 IMO 国家队选拔考试

程国根 译

1. 设 n 是一个正整数，且至少有 4 个正约数，记 $d(n)$ 为 n 的正约数个数. 求 n 的所有可能值，使得存在一个共 $d(n)-1$ 项的等差数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{d(n)-1}$，满足条件：对任意整数 $1 \leq i < j \leq d(n)-1$，都有 $\gcd(a_i, n) \neq \gcd(a_j, n)$.

2. 将 2023 个单位正方形排列成下图形式，最多能将多少个这样的形状（可以旋转）不重叠地放入一个一个 2023×2023 的方格网中?



3. 2022 年 IMO 预选题 A5

4. 2022 年 IMO 预选题 G2

5. 2022 年 IMO 预选题 A6

6. 2022 年 IMO 预选题 N5

7. 2022 年 IMO 预选题 C1

8. A 和 B 在黑板上进行一个游戏. 起初, 给定一个正实数 x. A 选取一个不小于 7 的素数, 然后 B 选取两个非负实数 r_1 和 r_2, 接着 A 选取两个整数 s 和 t, 使得 $r_1 < s < r_1 + xp$, $r_2 < t < r_2 + xp$, 并在黑板上按顺序写下 $0, s, t, st$ 除以 p 的余数. 之后, A 可以不断重复以下三个操作之一:

- 选取一个 1 到 $p-1$ 之间的整数 m, 并将黑板上的四个数全部改为加上 m 后除以 p 的余数;
- 选取一个 2 到 $p-1$ 之间的整数 n, 并将黑板上的四个数全部改为乘上 n 后除以 p 的余数;
- 将黑板上的四个数全部改为平方后除以 p 的余数, 若黑板上的四个数中至少有一个 0, 则无法进行此操作.

A 的目标是将黑板上的四个数变为 $0, 2, 3, 6$ (按照顺序排列). 然而, 若不存在满足 $r_1 < s < r_1 + xp$ 和 $r_2 < t < r_2 + xp$ 的整数 s, t, 则 A 无法达到目标. 求 x 的最大可能值, 使得无论 A 如何操作, B 都能阻止 A 达到目标.

9. 2022 年 IMO 预选题 G6

2

10. 2022 年 IMO 预选题 A2

11. $\triangle ABC$ 为锐角三角形，点 P 在三角形的内部（不包含边界），且 AP 和 BC 不垂直．设点 X、点 Y 分别是点 P 关于 AB、AC 的对称点，ω 为 $\triangle AXY$ 的外接圆．点 Q 在三角形的内部（不包含边界），且满足 $\angle QBC = \angle CAP$，$\angle QCB = \angle BAP$．直线 AQ 和 ω 交于点 R（异于 A、Q）．求证：$\triangle ABC$ 的外接圆、$\triangle PQR$ 的外接圆、ω，这三圆共点．

12. 鼹鼠王国一共有 2023 个城市，在不同的城市之间有一些双向隧道连接，两个城市间至多有一条隧道．此外，可以通过若干条隧道在任意两个城市间进行旅行．称一对不同的城市 $\{A, B\}$ 是好的，如果对任意不同于 A, B 的城市 C，从 C 到 A 的任意一条最短路线（即经过隧道条数最少的路线）与从 C 到 B 的任意最短路线都没有公共隧道．
求好的城市对的个数的第二大可能值．注意到 $\{A, B\}$ 和 $\{B, A\}$ 是同一个城市对．

2023 年日本 IMO 国家队选拔考试

程国根　译

1. 设 n是一个正整数，且至少有 4个正约数，记 $d(n)$为 n的正约数个数．求 n的所有可能值，使得存在一个共 $d(n)-1$项的等差数列 $a_{1},a_{2},\cdots,a_{d(n)-1}$，满足条件：对任意整数 $1\le i<j\le d(n)-1$，都有 $\gcd(a_{i},n)\neq \gcd(a_{j},n)$.

2. 将 2023个单位正方形排列成下图形式，最多能将多少个这样的形状（可以旋转）不重叠地放入一个一个 2023×2023的方格网中?

3. 2022 年 IMO 预选题 A5

4. 2022 年 IMO 预选题 G2

5. 2022 年 IMO 预选题 A6

6. 2022 年 IMO 预选题 N5

7. 2022 年 IMO 预选题 C1

8. A 和 B 在黑板上进行一个游戏. 起初，给定一个正实数 x. A 选取一个不小于 7的素数，然后 B 选取两个非负实数 r_{1}和 r_{2}，接着 A 选取两个整数 s和 t，使得 $r_{1}<s<r_{1}+xp$，$r_{2}<t<r_{2}+xp$，并在黑板上按顺序写下 $0,s,t,st$除以 p的余数. 之后，A 可以不断重复以下三个操作之一：

- 选取一个 1到 $p-1$之间的整数 m，并将黑板上的四个数全部改为加上 m后除以 p的余数；
- 选取一个 2到 $p-1$之间的整数 n，并将黑板上的四个数全部改为乘上 n后除以 p的余数；
- 将黑板上的四个数全部改为平方后除以 p的余数，若黑板上的四个数中至少有一个 0，则无法进行此操作.

A 的目标是将黑板上的四个数变为 $0,2,3,6$（按照顺序排列）. 然而，若不存在满足 $r_{1}<s<r_{1}+xp$和 $r_{2}<t<r_{2}+xp$的整数 s,t，则 A 无法达到目标. 求 x的最大可能值，使得无论 A 如何操作，B 都能阻止 A 达到目标.

9. 2022 年 IMO 预选题 G6

10. 2022 年 IMO 预选题 A2

11. $\triangle ABC$为锐角三角形，点 P在三角形的内部（不包含边界），且 AP和 BC不垂直. 设点 X、点 Y分别是点 P关于 AB、AC的对称点，ω为 $\triangle AXY$的外接圆. 点 Q在三角形的内部（不包含边界），且满足 $\angle QBC=\angle CAP$，$\angle QCB=\angle BAP$. 直线 AQ和 ω交于点 R（异于 A、Q）. 求证：$\triangle ABC$的外接圆、$\triangle PQR$的外接圆、ω，这三圆共点.

12. 鼹鼠王国一共有 2023个城市，在不同的城市之间有一些双向隧道连接，两个城市间至多有一条隧道. 此外，可以通过若干条隧道在任意两个城市间进行旅行. 称一对不同的城市 $\{A,B\}$是好的，如果对任意不同于 A,B的城市 C，从 C到 A的任意一条最短路线（即经过隧道条数最少的路线）与从 C到 B的任意最短路线都没有公共隧道. 求好的城市对的个数的第二大可能值. 注意到 $\{A,B\}$和 $\{B,A\}$是同一个城市对.

解答（PDF 中已展开）

```
\documentclass[openany]{ctexbook}\usepackage[article]{pxxbook}
\usepackage{geometry}\geometry{a6paper,left=1cm,right=1cm,top=0.5cm,bottom=0.8cm}
\usepackage{graphicx}
{\theoremstyle{plain}\theoremseparator{.}\theorembodyfont{\zihao{5}\songti}\newtheorem{ex}{}}
\begin{document}\setDOCadd{../../}\section*{2023年日本IMO国家队选拔考试}\flushright 程国根\quad 译\ex 设$n$是一个正整数，
↪ 且至少有$4$个正约数，记$d(n)$为$n$的正约数个数. 求$n$的所有可能值，
↪ 使得存在一个共$d(n)-1$项的等差数列$a_{1},a_{2},\cdots,a_{d(n)-1}$，满足条件：对任意整数$1\le i<j\le d(n)-1$，
↪ 都有$\gcd(a_{i},n)\neq \gcd(a_{j},n)$. \vfill \ex 将$2023$个单位正方形排列成下图形式，最多能将多少个这样的形状
↪ （可以旋转）不重叠地放入一个一个$2023\times 2023$的方格网中？
\centering\includegraphics[scale=0.2]{2023 Japan TST P2.png}
```

\vfill \ex 2022年IMO预选题A5\vfill \ex 2022年IMO预选题G2\vfill \ex 2022年IMO预选题A6\vfill \ex 2022年IMO预选题N5\vfill \ex
↪ 2022年IMO预选题C1\vfill \ex A和B在黑板上进行一个游戏．起初，给定一个正实数x．A选取一个不小于7的素数，
↪ 然后B选取两个非负实数r_{1}和r_{2}，接着A选取两个整数s和t，使得$r_{1}<s<r_{1}+xp$，$r_{2}<t<r_{2}+xp$，
↪ 并在黑板上按顺序写下$0,s,t,st$除以p的余数．之后，A可以不断重复以下三个操作之一：\begin{itemize} \item
↪ 选取一个1到$p-1$之间的整数m，并将黑板上的四个数全部改为加上m后除以p的余数； \item
↪ 选取一个2到$p-1$之间的整数n，并将黑板上的四个数全部改为乘上n后除以p的余数； \item
↪ 将黑板上的四个数全部改为平方后除以p的余数，若黑板上的四个数中至少有一个0，则无法进行此操作．
↪ \end{itemize}A的目标是将黑板上的四个数变为$0,2,3,6$（按照顺序排列）．然而，
↪ 若不存在满足$r_{1}<s<r_{1}+xp$和$r_{2}<t<r_{2}+xp$的整数s,t，则A无法达到目标．
求x的最大可能值，使得无论A如何操作，B都能阻止A达到目标．\vfill \ex 2022年IMO预选题G6\vfill \newpage\ex
↪ 2022年IMO预选题A2\vfill \ex $\triangle ABC$为锐角三角形，点P在三角形的内部（不包含边界），且AP和BC不垂直．
↪ 设点X、点Y分别是点P关于AB、AC的对称点，ω为$\triangle AXY$的外接圆．点Q在三角形的内部
↪ （不包含边界），且满足$\angle QBC=\angle CAP$，$\angle QCB=\angle BAP$．直线AQ和ω交于点R
↪ （异于A、Q）．求证：$\triangle ABC$的外接圆、$\triangle PQR$的外接圆、ω，这三圆共点．\vfill \ex
↪ 鼹鼠王国一共有2023个城市，在不同的城市之间有一些双向隧道连接，两个城市间至多有一条隧道．此外，
↪ 可以通过若干条隧道在任意两个城市间进行旅行．称一对不同的城市$\{A,B\}$是好的，如果对任意不同于A,B的城市C，
↪ 从C到A的任意一条最短路线（即经过隧道条数最少的路线）与从C到B的任意最短路线都没有公共隧道．
求好的城市对的个数的第二大可能值．注意到 $\{A,B\}$ 和 $\{B,A\}$ 是同一个城市对．\vfill \end{document}

