解答一道较复杂的二元不等式

2023-11-06　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5f8f6dea23e85674

题目：

已知正实数 a,b 满足 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{2}$. 求

$$\frac{b}{a+1}+\frac{a}{b+1}+\sqrt{\frac{1}{a^2+b^2+1}}$$

的最小值.

解答（PDF 中已展开）

答案：

当 $a=b=2$ 时，取最小值 $\frac{5}{3}$.

证明：

由 Cauchy 不等式：

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{4}{a^2+b^2}$$

即 $a^2+b^2\geq 8$.

因此

$$\begin{aligned}&\frac{b}{a+1}+\frac{a}{b+1}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab+a+b+1}\\=&1+\frac{a^2+b^2-ab-1}{ab+a+b+1}\\\geq&1+\frac{a^2+b^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\frac{1}{8}(a^2+b^2)}{ab+a+b+1}\\=&1+\frac{3}{8}\cdot\frac{a^2+b^2}{ab+a+b+1}\end{aligned}$$

由

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq\sqrt{2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}=1$$

知 $ab\geq a+b$，于是 $2a^2+2b^2=a^2b^2\geq ab(a+b)$

.

因此

$$\begin{aligned}&\frac{9}{2}(a^2+b^2)\\=&2(a^2+b^2)+2(a^2+b^2)+\frac{1}{2}(a^2+b^2)\\\geq&a^2b^2+ab(a+b)+ab\\=&ab(ab+a+b+1)\end{aligned}$$

由 $a^2+b^2\geq 8$ 知 $a^2+b^2+1\leq\frac{9}{8}(a^2+b^2)$.

因此

$$\begin{aligned}&\frac{b}{a+1}+\frac{a}{b+1}+\sqrt{\frac{1}{a^2+b^2+1}}\\\geq&1+\frac{3}{8}\cdot\frac{a^2+b^2}{ab+a+b+1}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}}\\\geq&1+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9}ab+\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}}\\=&1+\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{a^2+b^2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}}\\\geq&1+2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}}\\=&\frac{5}{3}\end{aligned}$$