2021 年马其顿数学奥林匹克

2021-05-22 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5f97b57533d3ac43

1. 数列 $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ 满足 $a_1=1$，且
$$a_{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n}ka_k$$
求证：对任意 $n>1$，$\sqrt[n]{a_n}<\dfrac{n+1}{2}$.

2. 在一个岛屿城市中，有 2021 个由桥梁连接的岛屿. 对于任意给定的一对岛屿 A 和 B，都可以从 A 通过若干桥梁到达 B. 此外，对于任意四个岛屿 A_1，A_2，A_3 和 A_4，如果对每个 $i\in\{1,2,3\}$，都存在一座从 A_i 到 A_{i+1} 的桥梁，则对于满足 $|j-k|=2$ 的 $j,k\in\{1,2,3,4\}$，A_j 和 A_k 必被一座桥梁连接. 求证：至少存在一个岛屿，它与其它所有岛屿均被桥梁连接.

3. 在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，且 $\angle BCD<\angle ABC<90^\circ$. 设 E 为对角线 AC 和 BD 的交点. $\triangle BEC$ 的外接圆 ω 在 X 处与线段 CD 相交. AX 和 BC 交于点 Y，BX 和 AD 交于点 Z. 求证：EZ 和 ω 相切的充要条件为 BE 和 $\triangle BXY$ 的外接圆相切.

4. 对于固定的正整数 $n\geq 3$，给定一块 $n\times n$ 的木板，其上所有单位正方形在起始时都是白色的. 将如下五个方格 (M,L,R,A,B) 称作“浮动加号”：L 在 M 的同一行，且在 M 的左侧；R 在 M 的同一行，且在 M 的右侧；A 在 M 的同一列，且在 M 的上侧；B 在 M 的同一列，且在 M 的下侧.（均不要求相邻.）求最大的正整数 k（依赖于 n），将其中 k 个单位正方形染成黑色后，不存在黑色的浮动加号.

5. 数列 $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ 满足 $x_1=\dfrac{7}{2}$，$x_{n+1}=x_n(x_n-2)$. 设 $x_{2021}=\dfrac{a}{b}$，其中 $a,b\in\mathbb{N}$ 且互素. 求证：若 p 为 a 的一个素因子，则 $3\mid p-1$ 或 $p=3$.