2024 年土耳其数学奥林匹克（第二轮）

2024-12-20 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_5fc10ee37cc7475b

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2024 年土耳其数学奥林匹克（第二轮）

第一天

程国根 译

1. 设正整数 $n \geq 3$. 按如下规则在完全图 K_n 的每一条边上写下一个实数：

(1) 对于任意三个顶点，它们之中两条边上的数相等，而第三条边上的数严格更大；

(2) 一个顶点的权重定义为从该顶点引出的各条边所所写数的总和. 所有顶点的权重都相等.

求 n 的所有可能取值.

2. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，其中，H 为垂心，D, E, F 分别是从 A, B, C 引出的高的垂足. 一个与 $\odot(DEF)$ 在点 D 处相切的圆与直线 EF 相交于 P, Q 两点. 设 R 和 S 分别是三角形 $\triangle BHC$ 的外接圆与 PH, QH 的第二个交点. 点 T 在直线 BC 上，且满足 $AT \perp EF$.
求证：R, S, D, T 四点共圆.

3. 对于所有不小于 2 的正整数 n，用 $f(n)$ 表示 n 的所有不同素因子之积. 例如，$f(5) = 5$，$f(8) = 2$，以及 $f(12) = 6$. 给定一个数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1 \geq 2$，$a_{n+1} = a_n + f(a_n)$，$n \in \mathbb{N}_+$.
求证：对于任意素数 p，在该数列中存在一项 a_k，使得 $p \mid a_k$.

2024 年土耳其数学奥林匹克（第二轮）

第二天

程国根　译

4. 设 n 为正整数，$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ 为 n 的所有正约数，且满足：

$$2d_2 + d_4 + d_5 = d_7,$$

$$d_3 d_6 d_7 = n,$$

$$(d_6 + d_7)^2 = n + 1.$$

求 n 的所有可能值.

5. 求所有函数 $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，使得对任意 $x, y, z \in \mathbb{R}_+$，都有

$$\left\{\frac{f(x)}{f(y)}\right\} + \left\{\frac{f(y)}{f(z)}\right\} + \left\{\frac{f(z)}{f(x)}\right\} = \left\{\frac{x}{y}\right\} + \left\{\frac{y}{z}\right\} + \left\{\frac{z}{x}\right\}.$$

注：对任意实数 x，$\{x\}$ 表示 x 的小数部分. 例如 $\{2.7\} = 0.7$.

6. 设 $m, n \geq 2$ 为正整数. 在一个 $m \times n$ 的国际象棋棋盘上，一些单位方格被车占据，使得每辆车都能被奇数个其它车攻击. 确定可放置在该棋盘上的车的最大数量.

译者注：国际象棋中的车能攻击到与自身同行（列）的棋子，且中间需无其它棋子阻拦.