2026 年高联 B 卷几何命题思路分析：如何尺规作图作出更接近 $\sqrt{\pi}$ 的长度

2026-09-18　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_605d9b3d38946d60

从 355/113 出发

若以尺规作图为出发点，首先要选定一个可作的目标长度。

尺规可构造数一定是代数数，而 π 是超越数，因此 $\sqrt{\pi}$ 不能被尺规精确作出。一个自然的办法，是先取优良的有理逼近 $r \approx \pi$，再作出 $\sqrt{r}$。

$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, \ldots], \qquad \frac{355}{113} = [3; 7, 15, 1].$

355/113 是 π 的连分数收敛分数；紧随其后的部分商 292 很大，所以它的逼近精度格外高。事实上，

$\sqrt{\frac{355}{113}} - \sqrt{\pi} \approx 7.53 \times 10^{-8}.$

于是，把 $\sqrt{355/113}$ 作为尺规目标十分合适。

令

$$u = \frac{\sqrt{31}}{3},$$
$$\sqrt{\frac{355}{113}} = \frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{4 + (u/3)^2}}{\sqrt{4 - (u/2)^2}}.$$

这个恒等式给出了构图的次序：先作 u，再作 $u/2, u/3$；分别完成一次平方减法和平方加法；最后乘 3/2，并取两段长度之比。

一、作出母长度 u

由

$u^2 = \frac{31}{9} = 4 - \frac{5}{9}, \qquad \frac{5}{9} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2,$

可先取 $4 = 2^2$ 为共同基准。

作半径为 1 的圆，取直径 $PR = 2$，圆心为 O；在 OR 上取 T，使 $OT = 2/3$。过 T 作 PR 的垂线交圆于 Q，则 $TQ = \sqrt{5}/3$。

再以 R 为圆心、TQ 为半径作圆，与原圆交于 S。因为 PR 是直径，

$PS^2 = 4 - \frac{5}{9} = \frac{31}{9},$

故 $PS = u$。

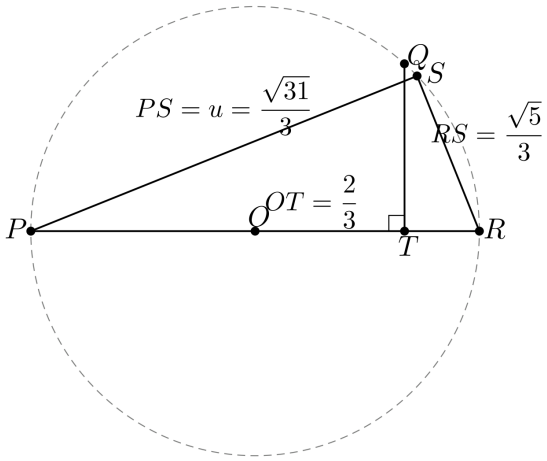

图 1: 图 1：作出母长度 $u = \sqrt{31}/3$

二、作出 $u/2$ 与 $u/3$

有了 $PS = u$，接下来只需作两个有理倍数。

由于 O 是 PR 的中点，过 O 作 RS 的平行线交 PS 于 M，由相似三角形得

$\frac{PM}{PS} = \frac{1}{2}$,

所以 $PM = u/2$。

又因为 $OT = 2/3$，有 $PT/PR = 5/6$。过 T 作 RS 的平行线交 PS 于 N，则

$PN = \frac{5u}{6}$,　　$MN = PN - PM = \frac{u}{3}$.

点 T 在这里恰好兼顾了根式构造和分点比例。

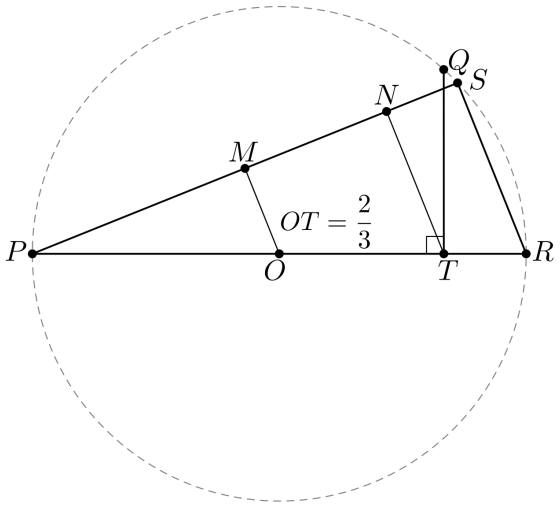

图 2: 图 2：由平行线得到 $u/2$ 与 $u/3$

三、分别构造两个根式

现在需要作出

$\sqrt{4-(u/2)^2}$，　　$\sqrt{4+(u/3)^2}$.

在原圆上取 K，使 $PK=PM=u/2$。由于 PR 是直径，$\angle PKR=90^\circ$，故

$RK=\sqrt{4-(u/2)^2}=\frac{\sqrt{113}}{6}$.

再在 P 点作圆的切线，并在切线上截取 $PL=MN=u/3$。由 $PL\perp PR$，有

$RL=\sqrt{4+(u/3)^2}=\frac{\sqrt{355}}{9}$.

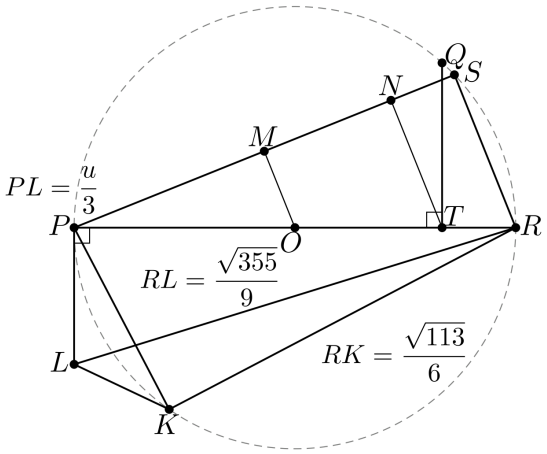

图 3: 图 3：同一基准 $PR^2 = 4$ 上的一减一加

四、完成最后的比例合成

此时

$\frac{RL}{RK} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{355}{113}}$,

还需补上因子 3/2。

取 PO 的中点 H，则 $RH = 3/2$。在 RK 上截取 $RC = RH$，连接 KL，过 C 作 KL 的平行线交 RL 于 D。

由 $\triangle RCD \sim \triangle RKL$,

$RD = RL \cdot \frac{RC}{RK} = \sqrt{\frac{355}{113}}$.

至此，完整构型得到，这就是今年高中数学联赛 B 卷的几何题。

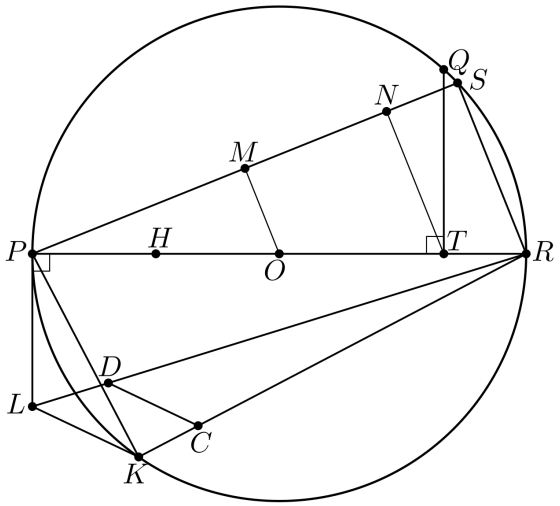

图 4: 图 4：完整构型

原题

如图，设 PR 是半径为 1 的圆 O 的直径，点 H 是线段 PO 的中点，线段 OR 上的点 T 满足 $TR=\frac{1}{3}$。圆周上的点 Q,S 满足 $TQ\perp PR$，且 $RS=TQ$。

弦 PS 上的点 M,N 满足 $OM\parallel TN\parallel RS$。圆周上的点 K 满足 $PK=PM$。直线 PL 是圆的切线且 $PL=MN$。弦 RK 上的点 C 满足 $RC=RH$，线段 RL 上的点 D 满足 $CD\parallel KL$。

证明

$RD=\sqrt{\frac{355}{113}}$.

思路分析

若从题面正向求解，最直接的入口在最后一组平行线。

由 $CD\parallel KL$ 可得 $\triangle RCD\sim\triangle RKL$，于是

$RD=RL\cdot\frac{RC}{RK}$.

而 $RC=RH=3/2$，所以问题归结为求 RK 与 RL。

这两段长度分别来自两个直角三角形。K 在以 PR 为直径的圆上，故

$RK^2=PR^2-PK^2$.

PL 是 P 点切线，故

$RL^2 = PR^2 + PL^2.$

题设又把 PK, PL 分别转成 PM, MN，因此只需回到弦 PS 上求出这两段分点长度。

最后利用 $OM \parallel TN \parallel RS$，可由 $\triangle PRS$ 的相似关系得到

$PM = \frac{PS}{2}, \qquad MN = \frac{PS}{3}.$

而 PS 由最前面的单位圆数据确定：$OT = 2/3$ 给出 $TQ^2 = 5/9$，再由 $RS = TQ$ 和 $\angle PSR = 90^\circ$ 得 $PS^2 = 31/9$。

因此整条长度链为

$PS \longrightarrow (PM, MN) \longrightarrow (PK, PL) \longrightarrow (RK, RL) \longrightarrow RD.$

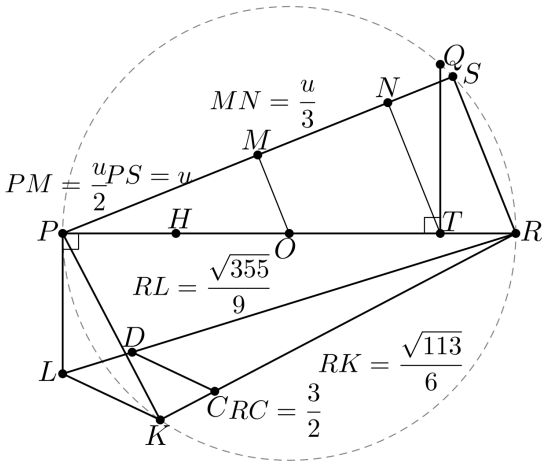

图 5: 图 5：正向解题时的长度传递

完整过程

圆半径为 1，故 $PR = 2$。由 $TR = \frac{1}{3}$ 得 $OT = \frac{2}{3}$。

在直角三角形 OTQ 中，

$TQ^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$

又 $RS = TQ$，故 $RS^2 = \frac{5}{9}$。由于 PR 是直径，$\angle PSR = 90^\circ$，从而

$PS^2 = 4 - \frac{5}{9} = \frac{31}{9}.$

由 $OM \parallel RS$ 得 $PM = PS/2$。又因 $TN \parallel RS$ 且 $PT/PR = 5/6$，有 $PN = 5PS/6$，故

$MN = PS/3$。于是

$PK^2 = PM^2 = \frac{31}{36}, \qquad PL^2 = MN^2 = \frac{31}{81}.$

点 K 在以 PR 为直径的圆上，所以

$RK^2 = 4 - \frac{31}{36} = \frac{113}{36}.$

而 PL 是圆在 P 点的切线，故 $PL \perp PR$，于是

$RL^2 = 4 + \frac{31}{81} = \frac{355}{81}.$

又因 H 是 PO 的中点，

$RC = RH = \frac{3}{2}.$

由 $CD \parallel KL$，$\triangle RCD \sim \triangle RKL$，故

$$\begin{aligned} RD &= RL \cdot \frac{RC}{RK} \\ &= \frac{\sqrt{355}}{9} \cdot \frac{3/2}{\sqrt{113}/6} \\ &= \sqrt{\frac{355}{113}}. \end{aligned}$$

证毕。

总结

从命题角度看，355/113 先决定两个勾股关系和共有的 $\sqrt{31}$，$1/2, 1/3$ 的比例继而确定 O, T 的位置，中点 H 再补上最后的 $3/2$。

整张图正是把这串代数关系逐项翻译成圆、平行线、切线和相似三角形。