数学竞赛每日一练第 1 期

2021-05-28 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_60eeaba73494a5c9

根据公众号粉丝建议，从今天开始开设数学竞赛每日一练的栏目，欢迎解答并投稿。微信号：gen951013

今天的题目是两道形式比较类似的 n 元不等式。

题目 1（**2021 土耳其 TST**）求所有的正整数 n，使得存在一组实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 满足，对任意 $i=1,2,\cdots,n$，均有 $i \leq x_i \leq 2i$，且

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{(x_1+2x_2+\cdots+nx_n)^2}=\frac{27}{4n(n+1)(2n+1)}$$

题目 2（**2018 年巴尔干地区预选题**）设 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 为正实数. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \frac{12}{n(n+1)(n+2)(3n+1)}\left(\sum_{i=1}^{n} i x_i\right)^2$$