# 一道不等式的若干推广

2022-10-24 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_61a05d89ea762604

《命题人讲座——代数不等式》中有一道例题：

正实数 $a$，$b$，$c$ 满足 $a+b+c=3$. 证明：

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq a^2+b^2+c^2.$$

该不等式可加强为：

正实数 $a$，$b$，$c$ 满足 $a+b+c=3$. 证明：

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq a^2+b^2+c^2.$$

**证明：**

不等式等价于

$$abc(a^2+b^2+c^2)\leq a+b+c=3$$

注意到

$$9abc=3abc(a+b+c)\leq (ab+bc+ca)^2$$

只需证

$$(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)\leq 27$$

由三元均值不等式即证.

此加强可推广至 $n$ 元.

正实数 $a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$. 证明：

$$\prod_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}a_i^2\leq n.$$

证明方法和上面是一样的.

如果将平方和改为立方和，则此结论对较小的 $n$ 不成立. 事实上，有如下结论：

正整数 $n \geq 20$，正实数 $a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$. 证明：

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \leq n.$$

（龚固）

此结论留给读者自行证明.

从另一角度出发，可以对开始不等式的四元形式进行加强.

正实数 $a$，$b$，$c$，$d$ 满足 $a + b + c + d = 4$. 求证：

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq \frac{2}{ab} + \frac{2}{cd}.$$

（陈计）

此不等式形式十分简洁，但证明难度很大.

如果直接对不等式右边使用均值不等式，进行加强，可以得到：

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq \frac{4}{\sqrt{abcd}}.$$

此结论不成立，一个反例为 $(a, b, c, d) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2)$.

事实上，我们有以下结论：

正实数 $a$，$b$，$c$，$d$ 满足 $a + b + c + d = 4$. 求证：

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq \frac{64}{9\sqrt{3abcd}}.$$

此不等式的取等条件较为奇怪（就是上面的反例）. 这里提供一个证明思路：

设 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4(1 + 3t^2)$，$t \in [0, 1)$.

可以先证：$abcd \leq (1 - t)^3(1 + 3t)$.

于是只需证：$(1 + 3t^2)\sqrt{(1 - t)^3(1 + 3t)} \leq \dfrac{16}{9\sqrt{3}}$.

求导即证.

对常数进行简单修改，可以加强为以下形式简洁的 $n$ 元不等式.

正实数 $a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = n - 1$. 求证：

$$\sqrt[n]{\frac{n-1}{a_1 a_2 \cdots a_n}} \geq 4\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n(n-1)}}.$$

最后这题我还没有太好的想法，欢迎读者来稿进行交流.