加拿大 CRUX 杂志问题 4721-4730

2022-03-12 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_6427b8400c2c3a49

1. 众所周知，从帕斯卡三角（杨辉三角）中，若如下沿着对角线求和：

$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{3}+\cdots$$

则可以得到斐波那契数列 f_n，其满足递推关系 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$.
但如果以更小的斜率进行求和，结果会如何？如下定义 a_n：

$$a_n=\binom{n}{0}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-2}{4}+\binom{n-3}{6}+\cdots$$

求证：$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-4}$.

（由 Greg Dresden 和 Myanna Nash 供题）

1. 设 I 为三角形 $\triangle ABC$ 的内心，A'，B'，C' 分别为射线 AI，BI，CI 和三角形外接圆的交点. 求证：$S_{\triangle A'B'C'}\geq S_{\triangle ABC}$.

（由 George Apostolopoulos 供题）

1. 数列 $\{u_n\}_{n\geq 1}$ 定义如下：$u_1=1$，

$$u_{n+1}=u_n+2^{2n-1}\cdot u_n^2.$$

求 $\{u_n\}$ 的通项公式.

（由 Michel Bataille 供题）

1. 求所有 x，$y>0$，使得

$$\frac{1}{(x+1)^8}+\frac{1}{(y+1)^8}=\frac{1}{8(xy+1)^4}.$$

（由 D.M.Batinetu-Giurgiu 和 Daniel Sitaru 供题）

1. 求证：

$$\frac{3\pi}{4}<\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x}dx<\frac{\pi^2}{4}.$$

提示：考虑摆线的图像.

（由 Hidefumi Katsuura 供题）

1. 求极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\cdot 2^{n-k}\cdot\binom{n}{k}}.$$

（由 Daniel Sitaru 供题）

1. 对任意 $n\geq 0$，求证：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{5}{4}\right)^k=\frac{F_{6n+3}}{2^{2n+1}},$$

其中 F_n 为斐波那契数列.

（由 Robert Frontczak 供题）

1. 设 x，y，$z\geq 1$. 求证：

$$\frac{4xy}{(1+y)^2}+\frac{4yz}{(1+z)^2}+\frac{4zx}{(1+x)^2}\geq 3.$$

（由 Antonio Garcia 供题）

1. 设实系数多项式 P 的次数至少为 2，已知 P 没有重根，且至少有一个实根. 求证：$\dfrac{P'}{P}$ 至少有一对共轭复根.

（由 George Stoica 供题）

1. 设圆 Γ 的圆心为 O，半径为 r，P 为 Γ 外的一点，且 $OP<2r$. OP 的垂直平分线和 Γ 交于 Q 和 R 两点，线段 PQ 交 Γ 于点 C. PC 的垂直平分线和 Γ 交于 B 和 B' 两点. 射线 PB'，PB 和 PR 分别和 Γ 交于点 A，A' 和 C'. 求证：
(1)$\triangle PAB$ 和 $\triangle PA'B'$ 全等.
(2) 直线 AA'，BB'，CR，QC' 和 PO 共点.

（由 Ion Patrascu 和 Ion Cotoi 供题）