换元法证明几道不等式

2021-04-28 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_651ff912a070ecea

2008 年 IMO 的第一天第 2 题第一问如下：

题目 1 设实数 x，y，z 都不等于 1，满足 $xyz=1$. 求证：

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1.$$

解答（PDF 中已展开）

分析这题难度并不大，方法也非常多. 可以直接配方，可以依据 $xyz=1$ 这一条件作换元：$x=\frac{p}{q}$，$y=\frac{q}{r}$，$z=\frac{r}{p}$，也可将 $z=\frac{1}{xy}$ 代入证明.

在这里，我们将待证式中的 $\frac{x}{1-x}$，$\frac{y}{1-y}$，$\frac{z}{1-z}$ 换为 a，b，c 进行处理.

证明

令 $\frac{x}{1-x}=a$，$\frac{y}{1-y}=b$，$\frac{z}{1-z}=c$.

则 $x=\frac{a}{a-1}$，$y=\frac{b}{b-1}$，$z=\frac{c}{c-1}$.

代入 $xyz=1$ 可得：

$$abc=(a-1)(b-1)(c-1)$$

即

$$a+b+c-1=ab+bc+ca$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\\=&a^2+b^2+c^2\\=&(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\=&(a+b+c)^2-2(a+b+c-1)\\=&(a+b+c-1)^2+1\\\geq&1\end{aligned}$$

证毕.

本题可以加强为：

题目 2 a，b，c 是三个互不相同的实数，证明：

$$\left(\frac{a-kb}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b-kc}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c-ka}{c-a}\right)^2\geq k^2+1.$$

事实上，本题等价于如下题目：

题目 2' 设实数 x，y，z 都不等于 1，满足 $xyz=1$．求证：

$$\left(\frac{x-k}{x-1}\right)^2+\left(\frac{y-k}{y-1}\right)^2+\left(\frac{z-k}{z-1}\right)^2\geq k^2+1.$$

这和**题目 1** 的方法是完全一致的，读者可以自行完成.

特别地，在 $k=-1$ 时的证明过程中，我们得到如下结论：

若存在实数 a，b，c 使得 $x=\dfrac{a+b}{a-b}$，$y=\dfrac{b+c}{b-c}$，$z=\dfrac{c+a}{c-a}$，则有 $xy+yz+zx=-1$.

即 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{xyz}=0.$

于是在出现条件式 $x+y+z+xyz=0$ 而不方便直接使用时，可以反其道而行之，考虑换元：

$$x=\frac{a-b}{a+b},y=\frac{b-c}{b+c},z=\frac{c-a}{c+a}$$

例如下题：

题目 3 实数 x，y，z 满足 $-1\leq x,y,z\leq 1$，且 $x+y+z+xyz=0$．求证：

$$x+y+z+\frac{72}{9+xy+yz+zx}\geq 8.$$

解答（PDF 中已展开）

证明

若 $x=-1$，则 $(y-1)(z-1)=0$，不妨设 $y=1$，待证不等式转变为 $z\geq -1$，显然成立.

若 $x=1$，则 $(y+1)(z+1)=0$，不妨设 $y=-1$，待证不等式转变为 $z\geq -1$，显然成立.

若 $-1<x,y,z<1$，由上可设：

$$x=\frac{a-b}{a+b},y=\frac{b-c}{b+c},z=\frac{c-a}{c+a}$$

于是 $a,b,c>0$，原不等式变为：

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}\geq 8$$

即

$$\frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}-8-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0$$

这是一个轮换式，故可分 $a\geq b\geq c$ 和 $c\geq b\geq a$ 两种情形讨论.

1. $a\geq b\geq c$ 时，由9-8 恒等式与不等式一文中的 “9-8 不等式”，有

$$\frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}-8\geq 0\geq \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

故不等式成立.

2. $c\geq b\geq a$ 时，即证：

$$\frac{2c(a-b)^2+(a+b)(c-a)(c-b)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}-\frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0$$

只需证

$$\frac{(a+b)(c-a)(c-b)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}\geq \frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

即

$$\frac{a+b}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}\geq \frac{b-a}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

结合恒等式

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$

只需证

$$2a(a+b+c)(ab+bc+ca)\geq abc(a+b)$$

展开显然.

与**题目 3** 类似，我们可以证明如下不等式：

题目 4 实数 x，y，z 满足 $-1\leq x,y,z\leq 1$，且 $x+y+z+xyz=0$. 求证：

$$x^2+y^2+z^2+1\geq (x+y+z\pm 1)^2.$$

解答（PDF 中已展开）

证明略.