2020 年阿拉伯数学奥林匹克

2021-05-17 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_65e04a95f531d1ac

1. x，y，z，t 为正实数，满足 $xyzt=1$. 求证：

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1+t}\geq 1.$$

(b) 对于任意正实数 a，b，c，d，求证：

1.
$$\frac{a^2}{a^2+bc}+\frac{b^2}{b^2+cd}+\frac{c^2}{c^2+da}+\frac{d^2}{d^2+ab}\leq 3.$$

2. $\triangle ABC$ 为斜三角形，H 为过顶点 A 的高的垂足. 设 I 为 AB 中点，J 为 AC 中点，K 为 IJ 中点. 过点 K 且和 AB 在点 I 处相切的圆 c_1 和过点 K 且和 AC 在点 J 处相切的圆 c_2 交于另一点 K'，求证：H，K，K' 三点共线.

3. 五名青年 A, B, C, D, E 参加某个比赛，将他们按照成绩进行排名，依次为第一名到第五名. 比赛前，X 和 Y 两人试图猜测排名. X 认为排名是 $ABCDE$，Y 认为排名是 $DAECB$. 比赛结束后，根据最终排名，我们发现：X 没有正确猜出任何参与者的排名，且没有正确猜出任何一对排名相邻的参与者；Y 正确猜出两名参与者的排名，以及两对排名相邻的参与者. 请给出本次比赛的五名青年的最终排名.

4. 称某个大于 1 的整数为“**算术的**”，如果它能被写成至少两个连续正整数之和.（例如：5 和 12 是“算术的”，因为 $5=2+3$，$12=3+4+5$.）

(1) 证明 2 的任意正整数次幂都不是“算术的”；
(2) 证明形如 $2^a p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$ 的数是“算术的”，其中 $r\geq 2$，p_1，p_2，$\cdots$，p_r 为素数，满足 $p_1<p_2<\cdots<p_r$，a_1，a_2，$\cdots$，a_r 为正整数，a 为非负整数；
(3) 求出所有将 2020 写成至少两个连续正整数之和的方法.