2023 年中国台湾 IMOC 几何组

2023-09-19　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_6614ad93e0b3069e

每年，我国台湾的前 IMO 参赛者组成的小团体都会举办一个夏令营，讲解知识和技巧，还有 8 次模拟考试。从 2017 年开始，他们取消了模拟考试，用若干练习题来取代。下面就是 2023 年夏令营的 IMOC 练习题。

2023 年中国台湾 IMOC 代数组——中文翻译

2023 年中国台湾 IMOC

程国根　译

几何组

1. $\triangle ABC$ 的外心为 O，M 为外接圆上不含点 A 的弧 BC 的中点．点 S 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，且满足 AS、BC、过 O 且垂直于 AM 的直线三线共点．作点 D 使得 $ABDC$ 为平行四边形．求证：D 在直线 SM 上．

2. 点 P 在 $\triangle ABC$ 内部，延长 AP、BP、CP，分别交对边于点 D、E、F．AD 和圆 (ABC) 再次交于点 D_1．点 S 在圆 (ABC) 上，直线 AS 和 EF 交于点 T，直线 TP 和 BC 交于点 K，直线 KD_1 和圆 (ABC) 再次交于点 X．求证：S、D、X 三点共线．

3. 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O．直线 AC 和 BD 交于点 E，直线 AD 和 BC 交于点 F．O_1、O_2 分别为 $\triangle ABE$、$\triangle CDE$ 的外心．设圆 $(ABCD)$ 和圆 (OO_1O_2) 交于 P、Q 两点．求证：P、Q、F 三点共线．

4. D 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点．直线 AC 和圆 (ABD) 再次交于点 E，直线 AB 和圆 (ACD) 再次交于点 F．M 为 EF 的中点，直线 BC 和圆 (DEF) 再次交于点 P．求证：$\angle BAP = \angle MAC$．

5. 六边形 $ABCDEF$ 内接于圆 O，且 AD、BE、CF 共点于 X．P 为平面上任意一点，设 $\triangle PAB$ 的外心为 O_{AB}，类似定义点 O_{BC}、O_{CD}、O_{DE}、O_{EF}、O_{FA}．求证：$O_{AB}O_{DE}$、$O_{BC}O_{EF}$、$O_{CD}O_{FA}$、OX 共点．

6. $\triangle ABC$ 的外心为 O．D 为 A 在 BC 上的垂足，P 为 AD 上一点．P 在 CA、AB 上的垂足分别为 E、F，D 在 EF 上的垂足为 T．直线 AO 和圆 (ABC) 再次交于点 A'，直线 $A'D$ 和圆 (ABC) 再次交于点 R．点 Q 在直线 AO 上，且满足 $\angle ABP = \angle QBC$．求证：D、P、T、R 四点共圆，且 DQ 与此圆相切．

2

2023 年中国台湾 IMOC

程国根　译

几何组

1. $\triangle ABC$的外心为 O，M为外接圆上不含点 A的弧 BC的中点．点 S在 $\triangle ABC$的外接圆上，且满足 AS、BC、过 O且垂直于 AM的直线三线共点．作点 D使得 $ABDC$为平行四边形．求证：D在直线 SM上.

2. 点 P在 $\triangle ABC$内部，延长 AP、BP、CP，分别交对边于点 D、E、F．AD和圆 (ABC)再次交于点 D_{1}．点 S在圆 (ABC)上，直线 AS和 EF交于点 T，直线 TP和 BC交于点 K，直线 KD_{1}和圆 (ABC)再次交于点 X．求证：S、D、X三点共线.

3. 四边形 $ABCD$内接于圆 O．直线 AC和 BD交于点 E，直线 AD和 BC交于点 F．O_{1}、O_{2}分别为 $\triangle ABE$、$\triangle CDE$的外心．设圆 $(ABCD)$和圆 $(OO_{1}O_{2})$交于 P、Q两点．求证：P、Q、F三点共线.

4. D为 $\triangle ABC$的边 BC上一点．直线 AC和圆 (ABD)再次交于点 E，直线 AB和圆 (ACD)再次交于点 F．M为 EF的中点，直线 BC和圆 (DEF)再次交于点 P．求证：$\angle BAP=\angle MAC$.

5. 六边形 $ABCDEF$内接于圆 O，且 AD、BE、CF共点于 X. P为平面上任意一点，设 $\triangle PAB$的外心为 O_{AB}，类似定义点 O_{BC}、O_{CD}、O_{DE}、O_{EF}、O_{FA}. 求证：$O_{AB}O_{DE}$、$O_{BC}O_{EF}$、$O_{CD}O_{FA}$、OX共点.

6. $\triangle ABC$的外心为 O．D为 A在 BC上的垂足，P为 AD上一点．P在 CA、AB上的垂足分别为 E、F，D在 EF上的垂足为 T．直线 AO和圆 (ABC)再次交于点 A'，直线 $A'D$和圆 (ABC)再次交于点 R．点 Q在直线 AO上，且满足 $\angle ABP=\angle QBC$．求证：D、P、T、R四点共圆，且 DQ与此圆相切.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2023年中国台湾IMOC}\flushright 程国根\quad 译\section*{几何组}\setcounter{ex}{0}\ex $\triangle ABC$的外心为$O$，
↪ $M$为外接圆上不含点$A$的弧$BC$的中点．点$S$在$\triangle ABC$的外接圆上，且满足$AS$、$BC$、
↪ 过$O$且垂直于$AM$的直线三线共点．作点$D$使得$ABDC$为平行四边形．求证：$D$在直线$SM$上．\vfill\ex
↪ 点$P$在$\triangle ABC$内部，延长$AP$、$BP$、$CP$，分别交对边于点$D$、$E$、$F$.
↪ $AD$和圆$(ABC)$再次交于点$D_{1}$．点$S$在圆$(ABC)$上，直线$AS$和$EF$交于点$T$，直线$TP$和$BC$交于点$K$，
↪ 直线$KD_{1}$和圆$(ABC)$再次交于点$X$．求证：$S$、$D$、$X$三点共线．\vfill\ex 四边形$ABCD$内接于圆$O$.
↪ 直线$AC$和$BD$交于点$E$，直线$AD$和$BC$交于点$F$．$O_{1}$、$O_{2}$分别为$\triangle ABE$、$\triangle
↪ CDE$的外心．设圆$(ABCD)$和圆$(OO_{1}O_{2})$交于$P$、$Q$两点．求证：$P$、$Q$、$F$三点共线．\vfill\ex
↪ $D$为$\triangle ABC$的边$BC$上一点．直线$AC$和圆$(ABD)$再次交于点$E$，直线$AB$和圆$(ACD)$再次交于点$F$.
↪ $M$为$EF$的中点，直线$BC$和圆$(DEF)$再次交于点$P$．求证：$\angle BAP=\angle MAC$．\vfill\ex
↪ 六边形$ABCDEF$内接于圆$O$，且$AD$、$BE$、$CF$共点于$X$．$P$为平面上任意一点，设$\triangle
↪ PAB$的外心为$O_{AB}$，类似定义点$O_{BC}$、$O_{CD}$、$O_{DE}$、$O_{EF}$、$O_{FA}$．求证：$O_{AB}O_{DE}$、
↪ $O_{BC}O_{EF}$、$O_{CD}O_{FA}$、$OX$共点．\vfill\ex $\triangle ABC$的外心为$O$．$D$为$A$在$BC$上的垂足，
↪ $P$为$AD$上一点．$P$在$CA$、$AB$上的垂足分别为$E$、$F$，$D$在$EF$上的垂足为$T$.
↪ 直线$AO$和圆$(ABC)$再次交于点$A'$，直线$A'D$和圆$(ABC)$再次交于点$R$．点$Q$在直线$AO$上，且满足$\angle
↪ ABP=\angle QBC$．求证：$D$、$P$、$T$、$R$四点共圆，且$DQ$与此圆相切．\vfill
```