2025 年 IDMC（Iran Dragon Math Competition）

2025-04-27 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_665369a0aed61e53

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2025 年 IDMC

程国根 译

第一天

1. 设 m、n 为正整数。随着新年的到来，伊朗家庭中一个珍贵的传统是给他们的亲戚打电话并互致诺鲁兹节（伊朗新年）的问候。新年伊始，一个有 n 名成员的家庭给一个有 m 名成员的亲戚家庭打电话来庆祝这个时刻。由于这两个家庭关系亲密，一个家庭的每一位成员都希望与另一个家庭的每一位成员交谈以互致问候。因此，在这一次通话中，所有 mn 种不同的一对一交谈都必须恰好进行一次。

每个家庭家里都只有一部电话，这意味着必须根据需要在家庭成员之间传递电话。例如，如果两个家庭的母亲开始通话，然后其中一个家庭的母亲想和另一个家庭的一个孩子通话，那么只需要传递一部电话。然而，如果在两位母亲通话之后，两个家庭的父亲想相互交谈，那么两部电话都必须交接——每个家庭交接一次——这就导致了两次电话传递。

在整个过程中，（两个家庭加起来）电话传递的总次数的最小可能值和最大可能值分别是多少?

2. 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 满足 $a_1=1, a_2=2$，且对任意正整数 $n, a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}^2}{1+a_n}+a_{n+1}$. 求证:

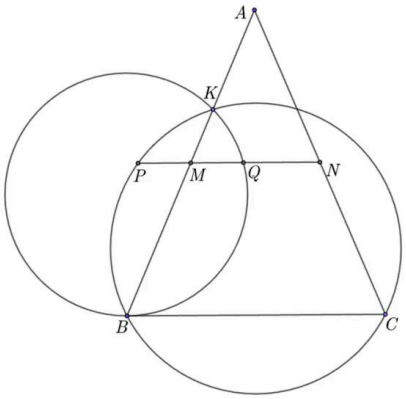
$$\frac{1}{1+a_1+a_2}+\frac{1}{1+a_2+a_3}+\cdots+\frac{1}{1+a_{1403}+a_{1404}}>\frac{2^{1403}-1}{2^{1404}}.$$

3. 给定平面上 $n\geq 6$ 个点，使得它们中任意两点之间的距离都互不相同．求证：在这些点中存在两个点 A, B，使得线段 AB 的垂直平分线的两侧都至少有两个点（即每一侧都至少包含一个不同于 A 和 B 的点）.

1

第二天

4. 设 $\triangle ABC$ 是一个等腰三角形，其中 $AB = AC$. 过点 B 和 C 的圆 ω_1 与线段 AB 相交于点 K（$K \neq B$）. 圆 ω_2 与 BC 相切于点 B 且过点 K. 设 M 和 N 分别是线段 AB 和 AC 的中点. 直线 MN 分别与圆 ω_1 和圆 ω_2 相交于点 P 和 Q，其中 P 和 Q 是更靠近点 M 的交点. 求证：$MP = MQ$.



5. 求所有正整数 a, b，使得 $a+1$ 和 $2(b+1)$ 均为完全平方数，且 $a^2 + b^2 - 1$ 为一个素数的整数次幂.

6. 是否有可能将所有首一的二次正整系数多项式放置在平面上的一个无限网格的各个单元格中，使得每个多项式恰好放置在一个单元格内，并且对于每一个面积大于 1 的有限矩形子网格，该矩形内全体多项式之和都有实根?